Centro de Matemática. 20 de julio de 2001

Examen de Introducción a la probabilidad y estadísitica

Ejercicio 1. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con igual distribución $F(x)$, que suponemos continua. Se define la variable aleatoria ν, que toma los valores $2, 3, \ldots$, mediante

$$X_1 < X_2 \quad \Rightarrow \quad \nu = 2$$

$$X_1 \geq X_2,\ X_2 < X_3 \quad \Rightarrow \quad \nu = 3$$

$$X_1 \geq X_2 \geq X_3,\ X_3 < X_4 \quad \Rightarrow \quad \nu = 4$$

$$\ldots$$

es decir $\nu = n$ si n es el primer índice tal que $X_n > X_{n-1}$.

a) Probar que $\mathbf{P}(\nu = n) = \frac{n-1}{n!} \quad (n = 2, 3, \ldots)$. Deducir que ν es una variable aleatoria, es decir, está definida en un conjunto de probabilidad uno.

b) Calcular $\mathbf{E}\nu$.

c) Si $F(x)$ es la distribución uniforme en $[0, 1]$, mostrar que

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x, \nu = n) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}$$

y deducir que $\mathbf{P}(X_1 \leq x, \nu \text{ es par }) = 1 - e^{-x}$.

Ejercicio 2. Sea $\{\mathbf{A}_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de sucesos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

a) Sea $\mathbf{A} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m=n}^{\infty} \mathbf{A}_m$. Explicar que sucesos elementales ω pertenecen a $\mathbf{A}$.

b) Demostrar que $\mathbf{A} \subset \cup_{m=n}^{\infty} \mathbf{A}_m$.

c) Demostrar que si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{A}_n) < \infty$ entonces $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = 0$.

d) Sea $X, X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n \neq X) < \infty$. Demostrar que $X_1, X_2, \ldots$ converge casi seguramente y hallar su límite.

Ejercicio 3. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución idéntica $F(x)$, que suponemos continua. Definimos para cada x real $Y_n(x) = \mathbf{1}_{\{X_n \leq x\}}$ y notamos $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k(x)$.

a) Hallar $\mathbf{E}Y_n(x)$ y $\mathbf{var}Y_n(x)$.

b) Encontrar el límite en probabilidad de de $F_n(x)$. ¿Hay convergencia casi segura? Fundamentar.

c) Demostrar que $\mathbf{P}(F_n(x) \to F(x),\ \text{para todo } x \text{ racional }) = 1$. Sugerencia: Demostrar que si $\mathbf{P}(\mathbf{A}_n) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, entonces $\mathbf{P}(\cap_n \mathbf{A}_n) = 1$.

d) Demostrar que $\mathbf{P}(F_n(x) \to F(x),\ \text{para todo } x \text{ real }) = 1$.

e) Demostrar que $\sup_{x\in\mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0$ casi seguramente.