Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 10**

1. Sea $L^2(\Omega)$ el conjunto de las variables aleatorias tales que $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Demostrar que $\langle X, Y\rangle = \mathrm{cov}(X, Y)$ es un producto interno, y deducir que (notando $\sigma_Z = \sqrt{\mathrm{var}Z}$): (a) $\mathrm{var}(X+Y) \leq 2(\mathrm{var}X + \mathrm{var}Y)$; (b) $\sigma_{X+Y} \leq \sigma_X + \sigma_y$.

2. Sea $f(x)$ una función definida en la recta real, no negativa y no decreciente, y sea X una variable aleatoria tal que existe $\mathbf{E}f(X)$. Demostrar la desigualdad $\mathbf{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{f(x)}\mathbf{E}f(X)$ para todo x real, suponiendo que la distribución de X es: (a) discreta; (b) absolutamente continua.

3. (a) Sean X, Y variables aleatorias, tales que $\mathbf{E}X = 1$, $\mathbf{E}Y = 2$, $\mathrm{var}X = 1$, $\mathrm{var}Y = 4$. Sea $Z = 3X - Y + 9$. Hallar $\mathbf{E}Z$ y $\mathrm{var}X$ en cada uno de los siguientes casos: (i) X e Y son independientes, (ii) X e Y son no correlacionadas. (iii) El coeficiente de correlación $\rho(X, Y) = 0.6$. (b) Sean X, Y variables aleatorias, tales que $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$, $\mathrm{var}X = \mathrm{var}Y = 1$, $\rho(X, Y) = r$. Calcular (i) $\mathrm{var}(X - rY)$, (ii) el coeficiente de correlación entre $X - rY$ e Y.

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional con densidad normal con parámetros $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ dada en la fórmula (29), página 12, capítulo 3. Demostrar que la correlación $\rho(X, Y)$ vale ρ.

Encontrar ejemplos (fundamentar) de sucesiones de variables aleatorias $X, X_1, X_2 \ldots$, tales que

5. La sucesión $\{X_n\}$ converge en probabilidad a X pero no converge casi seguramente.

6. La sucesión $\{X_n\}$ converge en probabilidad a X pero no converge en r-media ($r \geq 1$).

7. La sucesión $\{X_n\}$ converge en distribución a X pero no converge en en probabilidad.

8. *Desigualdad de Jensen.* Sea $\phi(x)$ una función real con derivada segunda continua y positiva en todos los puntos. (a) Demostrar que $\phi(y) - \phi(x) \geq \phi'(x)(y - x)$ para x, y reales cualesquiera. (b) Sea X una variable aleatoria tal que existe su esperanza y la de la variable aleatoria $\phi(X)$. Demostrar que $\phi(\mathbf{E}X) \leq \mathbf{E}\phi(X)$.

9. (a) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias que converge en media cuadrática. Demostrar que converge en media. (b) Demostrar que $\mathbf{E}(X_n)^m \to \mathbf{E}X^m$ cuando $n \to \infty$ para $m = 1, 2$. (c) Encontrar una sucesión de variables aleatorias que converga en media pero no converga en media cuadrática.

10. Sean $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ dos sucesiones de variables aleatorias, tales que $X_n \to^{\mathbf{P}} X$, $Y_n \to^{\mathbf{P}} Y$, si $n \to \infty$. Demostrar que $X_n + Y_n \to^{\mathbf{P}} X + Y$, si $n \to \infty$.

11. (a) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias, Y una variable aleatoria tal que $\mathbf{P}(Y = 0) = 1$. Demostrar que $X_n \to^{\mathbf{P}} 0$ si y solo si $X_n \to^d Y$. (b) Sean $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ dos sucesiones de variables aleatorias, tales que $X_n \to^d X$, $Y_n \to^{\mathbf{P}} 0$, si $n \to \infty$. Demostrar que $X_n + Y_n \to^d X$, si $n \to \infty$.

12. Sean $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ dos sucesiones de variables aleatorias, tales que $X_n \to^d X$, $Y_n \to^{\mathbf{P}} a$, si $n \to \infty$, donde X es una variable aleatoria, a una constante. Demostrar la siguiente proposición (*teorema de Cramér-Slutsky*): Si se cumplen las condiciones anteriores tienen lugar las afirmaciones $X_n + Y_n \to^d X + a$, $X_n \cdot Y_n \to^d X \cdot a$, $\frac{X_n}{Y_n} \to^d \frac{X}{a}$ si $a \neq 0$.

13. Sean $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ sucesiones de variables aleatorias, X variable aleatoria, a constante, $g(x)$ y $g(x, y)$ funciones reales. Demostrar: (a) Si $X_n \to^{\mathbf{P}} a$ y $g(x)$ es continua en a, entonces $g(X_n) \to^{\mathbf{P}} g(a)$; (b) si $g(x)$ es continua en la recta real, entonces $g(X_n) \to^{\mathbf{P}} g(X)$; (c) si $g(x, y)$ es continua en $\mathbf{R}^2$, entonces $g(X_n, Y_n) \to^{\mathbf{P}} g(X, Y)$.

14. Sea $\{F_n(x)\}$ una sucesión de funciones de distribución, y sea $F(x)$ una función de distribución continua. Demostrar que si $F_n(x) \to F(x)$ para todo x, entonces esta convergencia es uniforme (*teorema de Pólya*).