Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 11**

1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro λ. (a) Probar que $\alpha_n = \min\{X_1, \dots X_n\}$ tiende en probabilidad a cero. (b) Probar que α_n converge casi seguramente a cero.

2. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0, a]$. Se desconoce el valor de a, y se desea "estimar" por medio de una variable aleatoria. (a) Probar que $\beta_n = \max\{X_1, \dots X_n\}$ tiende en probabilidad a a. (b) Probar que $\beta_n = \max\{X_1, \dots X_n\}$ tiende casi seguramente a a. (c) ¿qué se puede decir de la sucesión $E(\beta_n)$?

3. *Método de Monte Carlo.* Sea $f : [0, T] \to R$ una función no negativa, continua, acotada por una constante a. Se desea estimar $I = \int_0^1 f(x)dx$. Consideramos una sucesión de vectores aleatorios independientes (X_k, Y_k) en R^2, con distribución uniforme en $[0, T] \times [0, a]$. Sea la sucesión $Z_k = \mathbf{1}_{\{Y_k \leq f(X_k)\}}$ $(k = 1, 2, \dots)$, y definimos $\hat{I}_N = \frac{aT}{N} \sum_{k=1}^{N} Z_k$.

(a) Probar que $\hat{I}_N$ converge casi seguramente a I cuando $N \to \infty$. (b) Hallar el valor esperado de I_N y su varianza. (c) Se busca acotar el error $|\hat{I}_N - I|$. Dado $\delta > 0$, indicar cómo elegir N para que $[\mathrm{var}(\hat{I}_N - I)]^{1/2} < \delta$. (d) Hallar un estimador para el caso de integrales múltiples. Hallar la varianza, y comparar el orden de esta con el de la varianza del estimador hallado para el caso de integrales simples.

4. Un ordenador genera números binarios aleatorios de modo que, en cada posición, los números 0 y 1 son elegidos con probabilidades iguales, e independientemente de los de las demás posiciones. Se calcula el promedio ν_n de las longitudes de las primeras n rachas, por ejemplo, si la sucesión comienza de la forma: 0000110111110..., la variable ν_4 tomará el valor (4+2+1+5)/4. ¿cómo se comporta ν_n cuando n tiende a infinito?

5. Sea $\{X_n\}$ una sucesion de variables aleatorias independientes dos a dos, tales que $\mathbf{P}(X_n = 2^n) = \mathbf{P}(X_n = -2^n) = 2^{-2n-1}, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$ para cada n. ¿Es aplicable la ley débil de los grandes números a esta sucesión?

6. Sea $\{X_n\}$ una sucesion de variables aleatorias independientes dos a dos, tales que $\mathbf{P}(X_n = n^{\frac{1}{4}}) = \mathbf{P}(X_n = -n^{\frac{1}{4}}) = \mathbf{P}(X_n = 0) = 1/3$ para cada n. Demostrar, que para esta sucesión es aplicable la ley débil de los grandes números.

7. Sea $\{X_n\}$ una sucesion de variables aleatorias independientes, tales que $\mathbf{P}(X_n = n^\gamma) = \mathbf{P}(X_n = -n^\gamma) = \frac{1}{2}$ para cada n, donde $\gamma < \frac{1}{2}$. ¿Es aplicable la ley débil de los grandes números a esta sucesión?

8. Al disparar a un blanco, el tiro cae en 10 con probabilidad 0.3, en el 9 con probabilidad 0.3, en 8 con probabilidad 0.2, en el 7 con probabilidad 0.1, en el 6 con probabilidad 0.1. Utilizando el teorema central del límite, estimar la probabilidad de que, al realizar 100 disparos los tiros acumulen más de 90 puntos.

9. Se tira un dado 500 veces. Hallar un valor aproximado de la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea mayor de 1800.

10. (a) Si X tiene distribución de Poisson con parámtero λ, probar que $\frac{X}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \to^d N$, si $\lambda \to \infty$, donde N tiene distribución normal estandar. (b) Calcular $P(X > 20)$ para $\lambda = 90$.

11. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$. (*Sugerencia:* aplicar el teorema central del límite para variables de Poisson adecuadas.)

12. (*Exámen 18/8/98*). Se considera una sucesión de vectores bidimensionales $Z_1, Z_2, \dots$ independientes y con distribución uniforme en el disco de radio 1 y centro $(0, 0)$. Sea M_n el máximo de los módulos de los primeros n vectores, es decir $M_n = \max\{\|Z_1\|, \dots, \|Z_n\|\}$, y A_n el área de la corona de centro en el origen entre los radios M_n y 1. (a) Mostrar que A_n tiende a cero casi seguramente. (b) Hallar α para que $n^\alpha A_n$ converja en distribución a una variable aleatoria no degenerada, y calcular la distribución de dicha variable.