**Introducción a la probabilidad y estadística (2001)** **Práctico 12**

**1.** Sea $X$ una cadena de Markov homogénea. Demostrar que

$$\mathbf{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = \mathbf{P}(X_k = j \mid X_0 = i)$$

**2.** Sea $X$ una cadena de Markov homogénea, y sea $\mathsf{p}^n = (p_i^n)$ la distribución de probabilidades en tiempo $n$, dada por $p_i^n = \mathbf{P}(X_n = i)$. Sea $\mathsf{P}^n = (p_{ij}^n)$ la matriz de transición. Demostrar que $p_j^{k+l} = \sum_i p_i^k p_{ij}^l$.

**3.** Se considera una cadena de Markov con matriz de transición

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar los valores y vectores propios de $\mathsf{P}$, y la descomposición $\mathsf{P} = BDB^{-1}$, con $D$ matriz diagonal y $B$ invertible. (b) Calcular $\mathsf{P}^n$ y determinar el comportamiento asintótico de $p_{jk}^n$, si $n \to \infty$, para cada par de estados $i, j$.

**4.** Discutir la periodicidad de los estados, y determinar $p_{jk}^n$ para todo $n$, $j$ y $k$. en una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**5.** *Procesos de ramificación.* Una población integrada inicialmente ($n = 0$) por un individuo ($X_0 = 1$) se reproduce de acuerdo a la siguiente regla: cada individuo que integre la población en tiempo $n$ tiene, en tiempo $n+1$ una cantidad $k = 0, 1, 2, \ldots$ de hijos con probabilidad $p_k$, donde $p_k \geq 0$ y $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, y él desaparece. (Alternativamente, se puede suponer que un objeto se parte en $k$ pedazos con probabilidad $p_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), o desaparece con probabilidad $p_0$, y luega cada uno de esos pedazos se parte o desaparece con las mismas probabilidades, y así sucesivamente). Sea $X_n$ la cantidad de individuos de la población en tiempo $n$. (a) Demostrar que $X_n$ es una cadena de Markov, identificar su espacio de estados $\mathbf{I}$, hallar la distribución inicial y la matriz de transición. (b) Suponiendo que $p_k > 0$ para todo $k = 0, 1, \ldots$, determinar si hay estados no esenciales y estados absorbentes.

**6.** En el ejercicio anterior: (a) Sea $q = \mathbf{P}(X_n = 0 \text{ para algún } n)$ la probabilidad de extinción de la población. Encontrar la ecuación que cumple $q$. (b) Encontrar la probabilidad de extinción para la población si $p_0 = p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$. (Este modelo se utiliza para determinar la probabilidad de que un cierto apellido desaparezca, contando los varones de una población).

**7.** Consideremos tiradas de un dado equilibrado. Decimos que en el instante $n$ el sistema está en el estado $X_n = j$ si el número más alto que apareció en las primeras $n$ tiradas es $j$. (a) Demostrar que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov homogénea, determinando el espacio de estados, y encontrar los estados esenciales, (b) Encontrar directamente las probabilidades $p_{jk}^n$. (c) Verificar en este caso la igualdad:

$$p_{jk}^{(n+m)} = \sum_l p_{jl}^n p_{lk}^n$$

(d) ¿Cuanto vale $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^n$? (**No** justifique su respuesta).

**8.** Demostrar que una cadena irreducible para la cuál un elemento diagonal $p_{jj}$ es positivo no puede tener estados periódicos.