Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 12**

1. Sea X una cadena de Markov homogénea. Demostrar que

$$\mathbf{P}(X_{n+k} = j \mid X_n = i) = \mathbf{P}(X_k = j \mid X_0 = i)$$

2. Sea X una cadena de Markov homogénea, y sea $\mathsf{p}^n = (p_i^n)$ la distribución de probabilidades en tiempo n, dada por $p_i^n = \mathbf{P}(X_n = i)$. Sea $\mathsf{P}^n = (p_{ij}^n)$ la matriz de transición. Demostrar que $p_j^{k+l} = \sum_i p_i^k p_{ij}^l$.

3. Se considera una cadena de Markov con matriz de transición

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar los valores y vectores propios de P, y la descomposición $\mathsf{P} = BDB^{-1}$, con D matriz diagonal y B invertible. (b) Calcular P^n y determinar el comportamiento asintótico de p_{jk}^n, si $n \to \infty$, para cada par de estados i, j.

4. Discutir la periodicidad de los estados, y determinar p_{jk}^n para todo n, j y k. en una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *Procesos de ramificación.* Una población integrada inicialmente ($n = 0$) por un individuo ($X_0 = 1$) se reproduce de acuerdo a la siguiente regla: cada individuo que integre la población en tiempo n tiene, en tiempo $n + 1$ una cantidad $k = 0, 1, 2, \dots$ de hijos con probabilidad p_k, donde $p_k \geq 0$ y $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, y él desaparece. (Alternativamente, se puede suponer que un objeto se parte en k pedazos con probabilidad p_k ($k = 1, 2, \dots$), o desaparece con probabilidad p_0, y luego cada uno de esos pedazos se parte o desaparece con las mismas probabilidades, y así sucesivamente). Sea X_n la cantidad de individuos de la población en tiempo n. (a) Demostrar que X_n es una cadena de Markov, identificar su espacio de estados $\mathbf{I}$, hallar la distribución inicial y la matriz de transición. (b) Suponiendo que $p_k > 0$ para todo $k = 0, 1, \dots$, determinar si hay estados no esenciales y estados absorbentes.

6. En el ejercicio anterior: (a) Sea $q = \mathbf{P}(X_n = 0 \text{ para algún } n)$ la probabilidad de extinción de la población. Encontrar la ecuación que cumple q. (b) Encontrar la probabilidad de extinción para la población si $p_0 = p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$. (Este modelo se utiliza para determinar la probabilidad de que un cierto apellido desaparezca, contando los varones de una población).

7. Consideremos tiradas de un dado equilibrado. Decimos que en el instante n el sistema está en el estado $X_n = j$ si el número más alto que apareció en las primeras n tiradas es j. (a) Demostrar que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov homogénea, determinando el espacio de estados, y encontrar los estados esenciales, (b) Encontrar directamente las probabilidades p_{jk}^n. (c) Verificar en este caso la igualdad:

$$p_{jk}^{(n+m)} = \sum_l p_{jl}^n p_{lk}^n$$

(d) ¿Cuanto vale $\lim_{n\to\infty} p_{jk}^n$? (**No** justifique su respuesta).

8. Demostrar que una cadena irreducible para la cuál un elemento diagonal p_{jj} es positivo no puede tener estados periódicos.