Facultad de Ciencias. Centro de Matemática.
Introducción a la probabilidad y estadística. 2001

Práctico 4

1. Calcular la probabilidad de que, en una serie de 1000 tiradas de una moneda, la frecuencia de aparición de cara se diferencie de la probabilidad de salir cara en no más de 0.03.

2. La probabilidad de éxito en un ensayo de un esquema de Bernoulli es 0.005. Calcular la probabilidad de que, en una serie de 800 ensayos ocurra por lo menos un éxito. (Sugerencia: utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial).

3. La probabilidad de acertar en el blanco es de 0.001. Calcular la probabilidad de acertar en el blanco dos o mas veces, en una serie de 5000 disparos. (Sugerencia: utilizar la aproximación de Poisson a la distribución binomial).

4. Hallar la probabilidad p_r, de que en una muestra de r dígitos aleatorios no haya dos iguales. Hallar una aproximación numérica de p_{10} utilizando la fórmula de Stirling.

5. Usando la fórmula de Stirling, probar:

$$C_n^{2n} \sim \frac{2^{2n}}{(\pi n)^{1/2}}$$

6. Un grupo de $2N$ niñas y $2N$ varones se divide en dos subgrupos del mismo tamaño. Hallar la probabilidad de que cada subgrupo contenga N niñas y N varones. Hallar una aproximación a esta probabilidad, con la fórmula del ejercicio anterior.

7. Se tira un dado equilibrado 6 veces; hallar las probabilidades de obtener: (a) al menos un 1, (b) exactamente un 1, (c) exactamente dos unos. Comparar las probabilidades obtenidas con las aproximaciones de Poisson.

8. Se lanza una moneda sucesiva e independientemente. La probabilidad de que ocurra cara en un lanzamiento es p, y la de que ocurra cruz es $1-p$. ¿Cual es la probabilidad de que ocurran cuatro caras antes que cinco números?

9. Encontrar la expresión explícita para r_n en la demostración del teorema local de De Moivre-Laplace, y encontrar una cota para C_0 (ver página 4 de las notas “Esquema de Bernoulli”).

10. Asumiendo conocido[1] que $e^{\frac{1}{12n+1}} < 1+\alpha_n < e^{\frac{1}{12n}}$ encontrar cotas inferiores y superiores para $1+\beta_n$ en la demostración del teorema local de De Moivre-Laplace (ver página 4 de las notas “Esquema de Bernoulli”).

11. Utilizando los ejercicios anteriores, encontrar cotas para la expresión

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{r_n}(1+\beta_n)$$

con $x = x_{m,n} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, y calcular un intervalo para el valor de de $P_{10000}(230)$. Comparar con la aproximación dada por el teorema.

[1]Ver Fórmula de Stirling en el libro: W. Feller, “Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones”, volumen I.