Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 5**

1. Consideremos una serie de 25 ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 0.2$. (a) Utilizando la tabla hallar la probabilidad de obtener entre 0 y 5 éxitos. (b) Utilizar el teorema integral de De Moivre-Laplace para aproximar la misma probabilidad. (c) Utilizar la aproximación de Poisson, sumando las seis probabilidades aproximadas.

2. En una serie de 25 ensayos de Bernoulli, hallar $P_{25}(5)$ para los valores de p correspondientes a 0.05, 0.1 y 0.5 de las siguientes formas: (a) Utilizando la tabla binomial, (b) utilizando la aproximación del teorema local de De Moivre-Laplace, (c) utilizando la aproximación de Poisson. ¿ cuales de las seis aproximaciones le parecen razonables?

3. Sea $P_n(m)$ la probabilidad de obtener m éxitos en una serie de n ensayos de Bernoulli, con probabilidad p de éxito en cada ensayo. (a) Calcular $\sum_{m=0}^{n} mP_n(m)$. (b) Calcular $\sum_{m=0}^{n} m(m-1)P_n(m)$. (c) Con los cálculos anteriores, y observando que $m^2 = m(m-1) + m$ calcular $\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m)$.

4. Sea $\varepsilon > 0$ y μ la cantidad de éxitos en n ensayos independientes de Bernoulli. (a) Determinar el conjunto M_n tal que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = \sum_{m \in M_n} P_n(m)$. (b) Observando que si $m \in M_n$ se cumple $\left(\frac{\frac{m}{n}-p}{\varepsilon}\right)^2 \geq 1$ demostrar que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\frac{m}{n}-p}{\varepsilon}\right)^2 P_n(m)$.

5. (Continuación del ejercicio anterior) (a) Demostrar, que $\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{\frac{m}{n}-p}{\varepsilon}\right)^2 P_n(m) = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ (b) Dar una demostración del Teorema de Bernoulli, independiente de los teoremas de De Moivre-Laplace.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución F, e $Y = aX + b$. (a) Demostrar que Y es una variable aleatoria. (b) Hallar G, la distribución de Y en función de F. (c) Suponiendo además, que X es absolutamente continua, demostrar que Y es absolutamente continua, y deducir la densidad de Y en función de la de X.

7. En una fábrica cada una de las piezas es sometida a un control de calidad, siendo aceptada con probabilidad p y rechazada con probabilidad $1 - p$. Las clasificaciones de las distintas piezas son independientes. Se clasifica piezas hasta obtener k de buena calidad. Sea X la cantidad de piezas rechazadas en dicho experimento. Hallar la distribución de la variable X.

8. La variable aleatoria X tiene distribución discreta y toma los valores $0, 1, 2, 4$ siendo las probabilidades de estos valores $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$. Hallar la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria y dibujar su gráfico.

9. La variable aleatoria X tiene densidad $p(x) = ce^{-|x|}$. Calcular $\mathbf{P}(X \leq 0)$, hallar el valor de la constante c, y calcular $\mathbf{P}(0 \leq X \leq 1)$.

10. Se arroja sucesivamente una moneda y se describen los resultados por medio de los números $U_1, U_2, \ldots$. Cuando en la $n-$ésima replicación el resultado es cara, ponemos $U_n = 1$; y en caso contrario, $U_n = 0$. Suponemos que en cada oportunidad, la probabilidad de obtener cara es $1/2$ y que las sucesivas replicaciones son independientes. Llamemos X al número cuya expresión en el sistema binario es

$$0.U_1U_2U_3 \cdots U_n \cdots,$$

o bien, de manera equivalente, $X = \sum_{n=1}^{\infty} U_n 2^{-n}$. Calcular: (a) $P(X \geq 1/2)$ (b) $P(X = 0)$ (c) $P(X = 1)$ (d) $P(j2^{-n} \leq X \leq k2^{-n})$ para $j \leq k \leq 2^n$. (e) $P(a \leq X \leq b)$ para $0 \leq a < b \leq 1$, como límite de probabilidades de intervalos de la parte (d) convenientemente elegidos.