Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 6**

1. Sea $p(x) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ la densidad de una variable aleatoria X con distribución normal con parámetros (a, σ). (a) Representar graficamente la función $p(x)$. (b) Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx$ y demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$. (c) Si $a = 0$ y $\sigma = 1$, determinar un intervalo $I = [-H, H]$ tal que $P(X \in I) = 0.9$.
2. (a) Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy, con densidad $p(x) = \frac{1}{c(1+x^2)}$. (a) Determinar la constante c. (b) Determinar un intervalo $I = [-H, H]$ tal que $P(X \in I) = 0.9$, y comparar el valor de H con el del ejercicio anterior.
3. Sean $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Diremos que la variable aleatoria X tiene *distribución gama* con parámetros (α, λ), si tiene densidad dada por $p(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}$, si $x \geq 0$, $p(x) = 0$, si $x < 0$. (a) Verificar que $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}e^{-x}dx$, y demostrar que $\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)\Gamma(\lambda-1)$ para todo $\lambda \geq 0$. (b) Calcular $\Gamma(1)$ y encontrar un fórmula para $\Gamma(n)$ con n natural.
4. Sea $G(x)$ con $x \geq 0$ una función monótona decreciente, no nula, que cumple la ecuación funcional $G(x + y) = G(x)G(y)$, para todo $x \geq 0$, $y \geq 0$. (a) Demostrar que $G(x) = e^{-\alpha x}$ para algun $\alpha \geq 0$. (b) Demostrar que si una variable aleatoria T cumple la propiedad de *pérdida de memoria*, $P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s)$, entonces tiene distribución exponencial.
5. En un esquema de Bernoulli, sea T la variable aleatoria que indica en número de experimentos que se realizan hasta obtener el primer éxito. (a) Calcular $P(T = k)$ para $k = 1, 2, \dots$ Se dice que T tiene *distribución geométrica* de parámetro p. (b) Demostrar que $P(T > m + n \mid T > m) = P(T > n)$, para m, n naturales arbitrarios. (c) Sea X con distribución exponencial de parámetro α. Demostrar que $[T] + 1$ tiene distribución geométrica y calcular su parámetro.
6. (a) Sea X una variable aleatoria con distibución discreta, que toma los valores $x_1, x_2, \dots$. Sea $\mathbf{A}_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$, e $Y = \sum_i x_i \mathbf{1}_{\mathbf{A}_i}(\omega)$. Demostrar que $P(X = Y) = 1$. (b) Sea $X \geq 0$ una variable aleatoria. Definimos para cada n $X_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$ si $\frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}$ para $k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$, $X_n(\omega) = n$ si $X(\omega) \geq n$. Obsevar que X es una variable aletoria discreta, y describir el conjunto de valores que toma. Demostar, que para cada ω, $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ y $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. (c) Si $F_n(x)$ es la distribución de X_n, demostrar que $F_n(x) \to F(x)$ si $n \to \infty$.
7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad donde $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ es un conjunto finito. Notamos $p_k = P(\{\omega_k\}) \geq 0$ para $k = 1, \dots, n$. Se define la *entropía* de P como $H(P) = -\sum_{k=1}^n p_k \log p_k$ (convenimos $0 \log 0 = 0$). (a) Demostrar que $0 \leq H(P) < \infty$, y hallar P tal que $H(P) = 0$. (b) Sea P_0 la probabilidad tal que $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$. Calcular $H(P_0)$ y demostrar que $H(P) \leq H(P_0)$ para toda P.
8. Supongamos que Ω es un conjunto de s símbolos de un cierto alfabeto, que p_k es la frecuencia de aparición del símbolo k-ésimo en un mensaje largo, que suponemos constante, y P es la probabilidad correspondiente. (a) Calcular la cantidad de mensajes de largo n que respetan las frecuencias anteriores, es decir, donde aparece $n_k = p_k n$ veces el símbolo k, para $k = 1, \dots s$. (b) Sea $I(n)$ el largo mínimo necesario para codificar con dos valores (traducir a un "lenguaje" de dos símbolos) todos los mensajes calculados en (a). Demostrar mediante la fórmula de Stirling que $\frac{\log 2}{n} I(n) \sim H(P)$. ¿Cuando un lenguaje es "más informativo"?
9. *Paradoja de Bertrand.* Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro O y radio 1. Determinar la probabilidad de que una cuerda AB de esta circunferencia elegida "al azar" sea mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto en los siguientes casos: (a) Fijamos un punto I en $\mathcal{C}$ elegimos un punto M del segmento OI con distribución uniforme, y le asociamos la cuerda AB perpendicular a OI que pasa por M. (b) Fijamos A en $\mathcal{C}$ y elegimos B con distribución uniforme en $\mathcal{C}$. (c) Elejimos un punto M en forma uniforme en el círculo, y consideramos la cuerda AB perpendicular a OM por el punto M.