Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 7**

1. (a) La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. (b) Consideremos una variable aleatoria Y con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y sea $F(x)$ una función de distribución continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$, donde F^{-1} denota la función inversa de la función F, tiene función de distribución $F(x)$. (c) Escribir un programa de computadora que simule una variable exponencial de parámetro α, y obtener la frecuencia de aparición de valores mayores que 3 para $\alpha = 1$ en 1000 experimentos.

2. Supongamos que la cantidad de huevos que pone un insecto tiene distribución de Poisson con parámetro λ, y la probabilidad de que un huevo se desarrolle es p. Asumiendo independencia para el desarrollo de huevos distintos, mostrar que el número de sobrevivientes tiene distribución de Poisson con parámetro λp.

3. Construir un ejemplo de dos variables aleatorias distintas que tengan igual función de distribución.

4. El vector aleatorio (X, Y) tiene distribución discreta, descrita en la siguiente tabla:

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	0.2	0	0.1	0
1	0.1	0.2	0.1	0
2	0	0.1	0.1	0.1

(a) Hallar $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$, y la función de distribución de la variable aleatoria X. (b) Calcular $\mathbf{P}(Y = 0)$, $\mathbf{P}(Y = 1)$, $\mathbf{P}(Y = 2)$, $\mathbf{P}(Y = 3)$ y hallar la función de distribución de la variable aleatoria Y. (c) ¿Son independientes X e Y?

5. Sea (X, Y) un vector con densidad normal con parámetros $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$. (pág. 12 del cap. 3). (a) Demostrar que X tiene densidad normal de parámetros (a_1, σ_1). (b) Demostrar que si $\rho = 0$, las variables X e Y son independientes. (c) Determinar a_2 y σ_2 sabiendo que $\mathbf{P}(Y \leq 150) = 0.5$ y $\mathbf{P}(Y \geq 120) = 0.975$.

6. (*Problema de la aguja de Buffon.*) Se arroja al azar una aguja de longitud $2b$ sobre un plano en el que se han trazado líneas paralelas que distan $2a$ (con $a > b$). Supondremos que la distancia X del centro de la aguja a la línea más próxima y el ángulo agudo Y que forma la dirección de la aguja con la de las líneas son variables independientes, respectivamente uniformes en $[0, a]$ y $[0, \pi/2]$. Calcular la probabilidad de que la aguja corte a alguna línea. Proponer un método para obtener una aproximación de π.

7. Sea eligen al azar e independientemente dos valores B y C de $[0, 1]$, con distribución uniforme. Calcular la probabilidad de que el polinomio $x^2 + Bx + C$ tenga (a) raíces reales y distintas, (b) una raíz doble, (c) raíces imaginarias.

8. Las variables aleatorias X e Y son independientes, y tienen la misma densidad, exponencial de parámetro α. (a) Hallar la densidad de la variable aleatoria $X + Y$. (b) Hallar las densidades de las variables aleatorias $M = \max(X, Y)$, $m = \min(X, Y)$, y demostrar que $D = M - m$ es exponencial de parámetro α. (c) Calcular $\mathbf{P}(X = Y)$ y $\mathbf{P}(X \geq Y)$.

9. Demostrar la siguiente proposición: Si X e Y son variables aleatorias que tienen distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces $X + Y$ es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

10. (a) Sean X e Y variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Hallar la densidad de $X + Y$. (b) Hallar la densidad de $X + Y + Z$ con (X, Y, Z) con densidad uniforme en el cubo $[0, 1]^3$. (c) ¿Que puede decir de la función densidad de la suma de n variables aleatorias independientes con densidad uniforme? ¿Es continua?, ¿hasta que orden es derivable?