Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 8**

1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con idéntica distribución $F(x)$. Sea $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$ y $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$. (a) Calcular las distribuciones de M y m. (b) Calcular $\mathbf{P}(x \le m \le M \le y)$. (c) Si $F(x)$ es absolutamente continua con densidad $p(x)$ demostrar que m y M tienen distribución absolutamente continua y hallar las densidades respectivas.

2. Un experimentado arquero tira flechas con distribucion normal bidimensional con parámetros $a = (0, 0)$ y matriz $B = I_2$ (I_n es la matriz identidad $n \times n$). Hallar la probabilidad de que acierte en un blanco centrado en el origen y con radio 1.

3. Considere un vector vector $X = (X_1, X_2, X_3)$ con distribución normal con $a = (0, 0, 0)$ y matriz $B = I_3$ (I_n la matriz identidad $n \times n$). (a) Demostrar que las coordenadas son variables aleatorias independientes. (b) Calcular la probabilidad de que $X \in [-1, 1]^3$. (c) Calcular la probabilidad de que $X \in B_3$, donde B_n es la bola de centro 0 y radio 1 en $\mathbf{R}^n$. (d) Considere un vector normal en $\mathbf{R}^n$, con $a = 0$ y matriz $B = I_n$. Demostrar que $p(n) = \mathbf{P}(X \in B_n) \to 0$ si $n \to \infty$.

4. Sea (X, Y) un vector normal bidimensional, con $a = (0, 0)$ y $B = I_2$. Hallar la densidad de la variable aleatoria $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

5. Juan(a) tiene dos amiga(o)s, que viven en direcciones opuestas de la linea de metro cercana a su casa, al norte y al sur. Para visitarla(o)s, llega en forma aleatoria al andén, a los lados del cual pasan ambas vias, y toma el primer tren que llega. Los trenes pasan exactamente cada 10 minutos en cada dirección, pero Juan(a) observa, que en promedio, 9 de cada 10 veces se dirige hacia el norte. ¿Puede explicar ud. que ocurre?

6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, con distribución comun $F(x)$ absolutamente continua, con densidad $p(x)$. Notamos $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ a las mismas variables ordenadas en forma creciente. Así, $X_{(1)}$ es el mínimo de las variables, $X_{(n)}$ es el máximo. (a) ¿Son independientes las variables $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$? Justifique su respuesta. (b) Mostrar que la probabilidad de que k de las n variables sean menores que x, y $n-k$ mayores que x es $\binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$, y deducir que $\mathbf{P}(X_{(i)} \le x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$, y que $X_{(i)}$ tiene densidad dada, para x real, por $f_{(i)}(x) = i\binom{n}{i} F(x)^{i-1} f(x)(1 - F(x))^{n-i}$.

7. Sea $f(x, y) = \frac{c^2}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} + h(x)h(y)$. Encontrar una función $h(x)$ no nula, y una constante $c > 0$ para que $f(x, y)$ sea la densidad de un vector aleatorio (X, Y), de forma que las densidades de X e Y sean normales estandar.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de parámetro α. Determinar la densidad de $X_1 + X_2$, $X_1 + X_2 + X_3$, y demostrar que la densidad de la suma $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ es $f_n(x) = \alpha^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$.

9. *Proceso de Poisson.* Consideremos $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatorias con distribución común exponencial de parámetro α, y tales que para todo n las n-úplas $X_1, \ldots, X_n$ son independientes. Notemos $S_n = \sum_{n=1}^{n} X_i$, las sumas parciales. Definimos para cada $t \ge 0$, $N(t) = \operatorname{card}\{k \colon S_k \le t\}$ es decir, la cantidad de sumas parciales anteriores a t. (a) Graficar una función posible $N(t)$ al variar t. (b) Observando que $\{N(t) \ge k\} = \{S_k \le t\}$, y utilizando el ejercicio anterior, escribir una fórmula mediante una integral para la probabilidad $\mathbf{P}(N(t) \ge k)$. (c) Observando que $\mathbf{P}(N(t) = k) = \mathbf{P}(N(t) \ge k) - \mathbf{P}(N(t) \ge k - 1)$ y aplicando partes en la integral de la parte anterior deducir que $N(t)$ tiene distribución de Poisson, de parámetro que se determinará.

10. (Ejercicio 1 del exámen del 15/2/1993) Sea (X, Y) un vector uniforme en el cuadrado $[0, 1]^2$. Sean $R = \sqrt{2\ln(1/(1 - X))}$, $\theta = \pi(2Y - 1)$. (a) Mostrar que θ tiene distribución uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y que R tiene densidad dada por $p(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}, \quad r \ge 0$. (b) Sean $Z = R\cos\theta$, $W = R \operatorname{sen} \theta$. Probar que Z y W son variables aleatorias independientes con distribución normal con parámetros $(0, 1)$.