Introducción a la probabilidad y estadística (2001) **Práctico 9**

1. Calcular $\mathbf{E}(X^k)$ $(k \geq 3)$ para una variable aleatoria X con distribución normal estandar. Deducir los momentos de orden k cuando $a = 0$ y $\sigma > 0$.

2. (a) Sea X una variable aleatoria que toma únicamente valores enteros no negativos. Demostrar que $\mathbf{E}X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$. (b) Sea X una variable aleatoria arbitraria. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n) \leq \mathbf{E}|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X| \geq n)$.

3. La densidad de la magnitud de la velocidad absoluta de una molécula tiene la forma $p(x) = (4x^2/(\alpha^3\sqrt{\pi}))\exp\{-x^2/\alpha^2\}$, si $x > 0$, y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$ (*Distribución de Maxwell*). Hallar la velocidad media de una molécula y su varianza.

4. Una persona quiere abrir una puerta, y tiene n llaves de las cuales solo una corresponde a la cerradura. La persona va eligiendo las llaves al azar y probando abrir la puerta. Calcular la esperanza matemática y la varianza del número de intentos en cada uno de los dos siguientes casos: (a) separa las llaves con las que probó abrir la puerta, (b) elige cada vez entre las n llaves.

5. Construir la densidad de una distribución de una variable aleatoria X, tal que (a) $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, y $\mathbf{E}|X|^3 = \infty$, (b) $\mathbf{E}|X|^3 = \infty$, y $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ para cualquier δ positivo, $\delta < 1$, (c) $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} = \infty$, y $\mathbf{E}(X^2) < \infty$ para cualquier $\delta > 0$.

6. La *función generatriz de momentos* de una variable aleatoria X se define mediante la identidad $M(t) = \mathbf{E}e^{tX}$. para los valores de t reales para los cuales existe la esperanza matemática anterior. Calcular la función generatriz de momentos para una variable aleatoria con distribución (a) normal estandar, (b) de Poisson de parámetro λ, (c) binomial de parámetros (n, p).

7.(Continuación) En los casos en que se puede derivar con respecto de t bajo el signo de esperanza, se obtiene $M^{(n)}(t) = \mathbf{E}(X^n e^{tX})$, y en consecuencia, $M^{(n)}(0) = \mathbf{E}(X^n)$, es decir, el momento α_n es la derivada de orden n de la función generatriz de momentos evaluada en $t = 0$. Hallar los momentos de una variable normal estandar de todos los ordenes (comparar con el ejercicio 1).

8. Sea X una variable aleatoria, y sea $0 < q < 1$. El *cuantil de orden* q de una variable aleatoria X se denomina a cualquiera de los números κ_q, que cumpla las condiciónes $\mathbf{P}(X \leq \kappa_q) \geq q, \qquad \mathbf{P}(X \geq \kappa_q) \geq 1 - q$. El cuantil de orden $\frac{1}{2}$ se denomina *mediana*. (a) Hallar la mediana de una variable aleatoria con distribución normal con parámetros (a, σ), y la de una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro α. (b) Consideremos una variable aleatoria X con función de distribución X dada por $F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^b}{c}\right\}$ si $x > 0$, y $p(x) = 0$ si $x \leq 0$, donde b y c son constantes positivas (*distribución de Weibull*). Hallar la mediana y los cuantiles de orden q de la variable aleatoria X.

9. Una tropa de N animales es sometido a una análisis para detectar una enfermedad. Cada animal está enfermo con una probabilidad p. El examen es realizado por medio de una análisis de sangre. Dicho análisis puede ser realizado de dos formas: (I) Hacer N análisis, uno por cada animal, (II) Realizar el análisis por grupos, mezclando la sangre de n individuos. Si da negativo, se admite que los n individuos de ese grupo están sanos. Si da positivo, se realiza un análisis para cada uno de ellos. Determinar (a) La probabilidad de que el test para un grupo de n animales de positivo, (b) El valor esperado de la variable ζ, cantidad de tests necesarios bajo el plan (II). (c) ¿Cómo se debería elegir n para minimizar el valor esperado de ζ?

10. *El turista desmemoriado.* Un turista desea visitar 4 ciudades: A, B, C y D. Primero viaja a una ciudad elegida al azar. Si eligió la A, luego elige al azar entre la B, la C y la D. Si esta vez elige la B, luego elige entre la A, la C y la D (tiene tan mala memoria que sólo recuerda la ciudad en que está, pero no las que visitado anteriormente). Hallar el valor esperado de ν, número de viajes realizados antes de visitar las 4 ciudades.