Introducción a los Números Algebraicos
Lista 5 - entrega 24/5

58. (2p.) Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $m \times m$ con coeficientes reales tales que $a_{i,i} > 0$ para todo i, $a_{i,j} < 0$ para todo $i \neq j$, y además todas las filas de A suman 0. Mostrar que A tiene rango $m - 1$.

59. Mostrar que el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por la desigualdad

$$|x_1| + \cdots + |x_r| + 2\left(\sqrt{x_{r+1}^2 + x_{r+2}^2} + \cdots + \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}\right) \leq n$$

es convexo. (Sugerencia: usar la desigualdad $\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}$.)

60. (a) Mostrar por inducción que

$$\frac{n^n}{n!} \geq 2^{n-1}.$$

(b) Concluir que

$$|\Delta(\mathcal{O}_K)| \geq 4^{r-1}\pi^{2s} > 1$$

61. (2p.) Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ es un dominio principal. (Sugerencia: para $(2) = (2, \sqrt{6})^2$, buscar un elemento con norma ± 2).

62. (2p.) Mostrar que hay dos clases de ideales en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$. (Sugerencia: no hay elementos de norma ± 2, pero hay un elemento de norma 60.

63. (2p.) Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{223}]$ tiene tres clases de ideales.

64. (3p.) Mostrar que el anillo de enteros en $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ es principal cuando m es uno de

$$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.$$

65. Sea m un entero negativo libre de cuadrados, y supongamos que el anillo de enteros en $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ es principal.

(a) Mostrar que $m \equiv 5 \pmod 8$ excepto cuando $m = -1, -2, -7$. (Sugerencia: considerar un primo arriba de 2).

(b) Si p es un primo impar tal que $4p < |m|$, entonces m es no residuo cuadrático módulo p.

(c) Concluir que si $m < -19$, entonces m es congruente a alguno de

$$-43, -67, -163, -403, -547, -667$$

módulo 840.

66. (a) Mostrar que el grupo de clases de ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-14}]$ es cíclico de orden 4.

(b) Mostrar que el grupo de clases de ideales de $\mathbb{Z}[\sqrt{-21}]$ es el grupo no cíclico de orden 4 (grupo de Klein).

67. (2p.) Probar que el anillo de enteros en $\mathbb{Q}[\sqrt{-103}]$ tiene cinco clases de ideales. (Sugerencia: hay solamente un ideal principal con norma 4 y solamente uno con norma 16).

68. (2p.) Probar que el anillo de enteros en $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{-3}]$ es principal. Notar que éste cuerpo contiene a $\mathbb{Q}[\sqrt{-6}]$; ¿contraejemplo de qué es esto?

69. (a) Probar que $\mathbb{Z}[\zeta_7]$ es un dominio de idales principales.
    (b) Probar que $\mathbb{Z}[\zeta_7 + \zeta_7^{-1}]$ es un dominio de ideales principales.

70. (2p.) Mostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ es un dominio de ideales principales.

71. (a) Sea K un cuerpo de números, I un ideal de $\mathcal{O}_K$. Mostarr que existe una extensión finita L/K en la que I se hace principal. (Sugerencia: alguna potencia de I es principal).
    (b) Mostrar que existe una extensión finita L/K en la cual todo ideal de K se hace principal.
    (c) Encontrar una extensión de grado 4 sobre $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-21}]$ en la que todo ideal de $\mathcal{O}_K$ se haga principal.

72. Sea $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ con $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Recordar que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, y $\Delta(\alpha) = -108$.
    (a) Mostrar que $u^3 > 20$, donde u es la unidad fundamental en $\mathbb{Z}[\alpha]$.
    (b) Mostrar que $\beta = (\alpha - 1)^{-1}$ es una unidad entre 1 y u^2 ; concluir que $\beta = u$.

73. (a) Mostrar que $x^3 + x - 3$ tiene una única raíz real α, con $\alpha > 1.2$.
    (b) Calcular $\Delta(\alpha)$ y ver que es libre de cuadrados. Concluir que es igual a $\Delta(\mathcal{O}_K)$ donde $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.
    (c) Determinar la unidad fundamental en $\mathcal{O}_K$.

74. Sea K una extensión normal de $\mathbb{Q}$ con grupo de Galois G.
    (a) Mostrar que K tiene grado 1 ó 2 sobre $K \cap \mathbb{R}$.
    (b) Mostrar que $K \cap \mathbb{R}$ es una extensión normal de $\mathbb{Q}$ si y solo si todos los monomorfismos de $K \cap \mathbb{R}$ son reales.
    (c) Mostrar que $\mathcal{O}_K^\times/(\mathcal{O}_K^\times \cap \mathbb{R})$ es finito si y solo si la conjugación compleja está en el centro de G.

75. Sea $m \geq 3$.
    (a) Mostrar que
    $$1 - \zeta_m^k = -2i\zeta_{2m}^k \operatorname{sen}(k\pi/m).$$
    para todo $k \in \mathbb{Z}$; concluir que
    $$\frac{1 - \zeta_m^k}{1 - \zeta_m} = \zeta_{2m}^{k-1} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/m)}{\operatorname{sen}(\pi/m)}.$$
    (b) Mostrar que si k y m no son ambos pares, entonces $\zeta_{2m}^{k-1} = \pm\zeta_m^h$ para algún $h \in \mathbb{Z}$.

(c) Mostrar que si k es coprimo con m entonces

$$u_k = \frac{\operatorname{sen}(k\pi/m)}{\operatorname{sen}(\pi/m)}$$

es una unidad en $\mathbb{Z}[\zeta_m]$.