Primos de la forma $\underline{\underline{2x+1}}$ ∞

¿ $4x+1$, $\underbrace{4x+3}_{\infty \text{ "fácil"}}$?

$\downarrow$

∞ más difícil

Legendre: conjetura y usa 4

a, q coprimos $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{qx+a}}$ hay ∞ primos

Dirichlet demuestra en 1837 – 1840.

DAVENPORT 1–6 // Apostol 6–8

D1

q primo $\qquad q > 2$

Euler $\qquad \zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \longrightarrow +\infty \quad (s \to 1^+)$

ej.

$$\overset{+\infty}{\uparrow}$$
$$\log \zeta(s) = \sum_p \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} p^{-ms}}_{-\log(1-p^{-s})} = \sum_p p^{-s} + \underbrace{\sum_p \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} p^{-ms}}_{\text{acotado}}$$

Ej $\qquad \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} p^{-ms} < 1 \qquad (s>1)$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\sum_p p^{-1} \text{ diverge}}$ $\rightsquigarrow$ ∞ primos

Idea de Dirichlet: ¿ $\sum_{p \equiv a(q)} \frac{1}{p}$?

Idea naive (NO FUNCIONA)

$$\zeta_{a,q}(s) = \sum_{n \equiv a(q)} \frac{1}{n^s} \;\cancel{\overset{?}{=}\; \prod_{p \equiv a(q)} (1-p^{-s})^{-1}}$$

Ejercicio

Si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $\quad f(xy) = f(x) f(y) \quad \forall x, y$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \prod_p (1 - f(p) p^{-s})^{-1}$$

Ej 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1} \qquad s>1$$

$$\Uparrow$$

Ej 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \prod_p (1-g(p))^{-1}$$

- ⊗ g compl. mult.
- ⊗ $\sum g(n)$ conv. abs

Ej 3 $\quad \sum_p \sum_{m=2}^{\infty} m^{-1} p^{-ms} < 1 \qquad s>1$

Ej 4 a) $\exists \infty$ primos $4x+3$ $\qquad$ 4 b)* $\exists \infty$ primos $4x+1$