5] # Caracteres primitivos

χ carácter módulo q.

$$\chi(n) = 0 \quad (n,q)>1$$
$$\neq 0 \quad (n,q)=1$$

periódico módulo q.

¿Puede tener un periodo menor?

① $q=9$ $\quad \chi(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1,4,7 \ (9) \leftrightarrow 1 \ (3) \\ -1 & n \equiv 2,5,8 \ (9) \leftrightarrow 2 \ (3) \\ 0 & n \equiv 3,6,0 \ (9) \leftrightarrow 0 \ (3) \end{cases}$

② $q=6$ $\quad \chi(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1 \ (6) \\ -1 & n \equiv 5 \ (6) \\ 0 & (n,6)>1 \end{cases}$

Obs: si $(n,6)=1$
$$\chi(n) = \chi_1(n) := \begin{cases} 1 & n \equiv 1 \ (3) \\ -1 & n \equiv 2 \ (3) \end{cases} \quad ⊗$$

~~χ car mód q.~~

Sea $q_1 > 0$ mínimo tq:

(conductor de χ)

$$\underbrace{\chi(n+tq_1) = \chi(n)}$$ siempre que $(n,q)=1$
$(n+tq_1, q)=1$

Eg $\quad \chi_0(n) = \begin{cases} 1 & (n,q)=1 \\ 0 & (n,q)>1 \end{cases} \rightsquigarrow q_1 = 1$

Def χ es primitivo si $q_1 = q$

Prop χ es car mód $q \Rightarrow \exists!\, \chi_1$ primitivo $\bmod q$

$$\chi(n) = \begin{cases} \chi_1(n) & \text{si } (n,q)=1 \\ 0 & \text{si } (n,q)>1 \end{cases}$$

χ_1 está definido módulo $q_1 \mid q$.

Dem $\chi_1(n) = \chi(n)$ cuando $(n,q)=1$

$\chi_1(n) = ?$ cuando $(n,q_1)=1$, $(n,q)>1$.

Ejercicio ① si $(n,q_1)=1 \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z}$

con $(n+tq_1, q)=1$

$$\chi_1(n) = \begin{cases} \chi(n+tq_1) & (n,q_1)=1 \\ 0 & \text{———} \end{cases}$$

② χ_1 es multiplicativo

Como $\chi_1(1) = \chi(1) = 1 \Rightarrow \chi_1 \not\equiv 0$ es car mod q_1

③ $q_1 \mid q$.

(periodo q, $q_1 \Rightarrow \operatorname{mcd}(q,q_1) = xq + yq_1$ es periodo)

$q = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \rightsquigarrow \chi = \chi_0 \chi_1 \cdots \chi_r$

donde χ_i car mod $p_i^{\alpha_i}$

χ primitivo $\Leftrightarrow \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_r$ son primitivos

χ mod p^α $(p>2)$

$$\chi(n) = e\left(\frac{m\,\nu(n)}{p^{\alpha-1}(p-1)}\right)$$

primitivo sii $p \nmid m$

$p=2$

$$\chi(n) = e\left(\frac{m\nu}{2} + \frac{m'\nu'}{2^{\alpha-2}}\right)$$

primitivo si
$\begin{cases} \alpha=2 & m=1 \\ \alpha>2 & m' \text{ impar} \end{cases}$

($\alpha=1$ solo car ppal)

Obs χ caracter mod q $\rightsquigarrow$ χ_1 car primitivo asociado, mod q_1

$$\underline{L(s,\chi)} = \prod_{p\nmid q}\left(1-\chi(p)\,p^{-s}\right)^{-1}$$

Le faltan factores de Euler

$$= \prod_{p\nmid q}\left(1-\chi_1(p)\,p^{-s}\right)^{-1}$$

$$= L(s,\chi_1)\prod_{\substack{p\mid q\\ p\nmid q_1}}\left(1-\chi_1(p)\,p^{-s}\right)$$

producto finito

$$\underline{L(1,\chi_1)\neq 0} \implies L(1,\chi)\neq 0$$

Caracteres reales primitivos

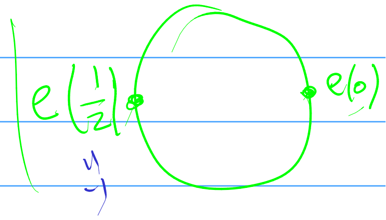
$q = p^{\alpha}$ impar $\qquad \chi(n) = e\left(\frac{m\cdot \boxed{\nu(n)}}{p^{\alpha-1}(p-1)}\right)$

$\boxed{(n,q)=1}$

$e(z) = e^{2\pi i z}$

χ real sólo si:

$$\frac{m}{p^{\alpha-1}(p-1)} = 0, \; 1/2$$



χ prim $\Rightarrow p \nmid m$

$\rightsquigarrow \alpha = 1, \quad m = \frac{p-1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \chi(n) = e\left(\frac{\nu(n)}{2}\right) = (-1)^{\nu(n)} = \left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} +1 & n \equiv \square \\ -1 & n \not\equiv \square \end{cases}$$

$(n = g^{\nu(n)})$

$q = 2^{\alpha}$

$\alpha = 1 \rightsquigarrow$ No hay car. primitivo

$\alpha = 2 \rightsquigarrow \chi_4(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1 \ (4) \\ -1 & n \equiv 3 \ (4) \end{cases}$

$\alpha \geq 3 \qquad \chi(n) = e\left(\frac{m\nu}{2} + \frac{m'\nu'}{2^{\alpha-2}}\right) \qquad \begin{matrix} 0 \leq m < 2 \\ 0 \leq m' < 2^{\alpha-2} \end{matrix}$

$n = (-1)^{\nu}\cdot 5^{\nu'}$

χ primitivo $\Leftrightarrow m'$ impar

χ real $\Rightarrow \alpha = 3, \; m' = 1 \;\rightarrow\; m = 0, \; m' = 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\rightarrow\; m = 1, \; m' = 1$

$m=0, m'=1$ $\quad \chi(n) = e\left(\frac{v}{2}\right) = (-1)^{v}$

$$\chi_8(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1,7\ (8) \\ -1 & n \equiv 3,5\ (8) \end{cases}$$

$m=1, m'=1$ $\quad \chi(n) = e\left(\frac{v}{2}\right)\cdot e\left(\frac{v}{2}\right) = \chi_4(n)\,\chi_8(n)$

Prop Los caracteres primitivos reales módulo potencia de primo son:

$$\left(\frac{n}{p}\right)\ p \text{ impar},\quad \chi_4,\quad \chi_8,\quad \chi_4\chi_8$$

Obs: conductores de caracteres primitivos reales son

→ q impar libre de cuadrados

ó $4\cdot$(impar libre de □) ó $8\cdot$(impar libre de □)

Obs: $\chi_4(p) = \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-4}{p}\right)$

$n=p$ primo

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} +1 & p\equiv 1\ (4) \\ -1 & p \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

Símb. Legendre

Símbolo de Jacobi $\left(\frac{m}{n}\right)$ si n es impar

$n = p_1 \cdots p_r \rightsquigarrow \left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p_1}\right) \cdots \left(\frac{m}{p_r}\right)$

OJO! No es cierto que $\left(\frac{m}{n}\right) = +1 \Rightarrow m \equiv \square\ (n)$

SI vale, m, n impares $\Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{m}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_4(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)} \quad \forall n \text{ impar},$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} +1 & p \equiv 1,7 \ (8) \\ -1 & p \equiv 3,5 \ (8) \end{cases} = \chi_8(p)$$

$\left(\frac{8}{p}\right)$

$$\boxed{\chi_8(n) = \left(\frac{8}{n}\right)} \quad \forall n \text{ impar}$$

$$\boxed{\chi_4(n)\chi_8(n) = \left(\frac{-8}{n}\right)} \quad \forall n \text{ impar}$$

---

p impar

$$\chi_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right) \overset{LRC}{=} \left(\frac{p^*}{n}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} p^* &= \pm p \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} p \\ p^* &\equiv 1 \ (4) \end{aligned}}$$

Ejercicio ① LRC $\Rightarrow$ $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p^*}{q}\right)$ p, q primos impares

② $\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{p^*}{n}\right)$ $\forall n$ impar

---

Símbolo de Kronecker si $d \equiv 1 \ (4) \Rightarrow \left(\frac{d}{2}\right) = \begin{cases} 1 & d \equiv 1 \ (8) \\ -1 & d \equiv 5 \ (8) \end{cases}$

③ $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p^*}{n}\right)$ $\forall n$

Conclusión (1) los caracteres primitivos reales de conductor potencia de primos son.

$$\left(\frac{-4}{n}\right), \left(\frac{8}{n}\right), \left(\frac{-8}{n}\right), \left(\frac{p^*}{n}\right)$$

(2) los caracteres primitivos reales son $\left(\frac{d}{n}\right)$

donde d es producto de primos impares distintos posiblemente $\times$ $(-4, 8, -8)$

$$L\left(s, \left(\frac{d}{n}\right)\right) = \sum \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s}$$