Teo (Landau 1918) $\chi_1 \neq \chi_2$ reales (prim) mod q_1, q_2 ceros reales β_1, β_2 $\Rightarrow$

$$\min(\beta_1, \beta_2) < 1 - \frac{c_{15}}{\log(q_1 q_2)}$$

Corolario ① A lo sumo un χ mod q puede tener cero real $\beta > 1 - \frac{c}{\log q}$ $\quad (c = c_{15}/2)$

② Sup $\chi_1, \chi_2, \dots$ mod $q_1 \leq q_2 \leq \dots$ con ceros reales $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ tq $\beta_j > 1 - \frac{c_{19}}{\log q_j}$

$$\Rightarrow q_{j+1} > q_j^{2}$$

$\left(c_{19} = \frac{c_{15}}{3} \right.$; $1 - \frac{c_{19}}{\log q_j} < \beta_j < 1 - \frac{c_{15}}{\log q_j q_{j+1}}$

$\left. \rightsquigarrow (2+1)\log q_j < \log q_j + \log q_{j+1} \right)$

③ $\exists c_{20} > 0 \quad \forall z \geq 3$

hay a lo sumo UN cero para cualquier χ mod $q \leq z$ con $\beta > 1 - \frac{c_{20}}{\log z}$. $\quad \left(c_{20} = \frac{c_{15}}{2} \right)$

$$\beta, \beta' > 1 - \frac{c_{20}}{\log z} \geq 1 - \frac{\overbrace{2c_{20}}^{c_{15}}}{\log q_1 q_2}$$

$L(1,\chi) \neq 0$ ¿ cota superior para β con $L(\beta,\chi)=0$?

$\boxed{h(d) \geq 1}$ fórmula de clases $\chi = \chi_d$ $(d = \pm q)$

unidad fund.

$\log \varepsilon_q \cdot \frac{h(d)}{|d|^{1/2}} \cdot (*) = L(1,\chi) > c_{21} \cdot q^{-1/2}$

ejercicio: ① $|L'(s,\chi)| < c_{22} \cdot \log^2 q$ $\left(1-\frac{1}{\log q} \leq s \leq 1\right)$

② $|L(s,\chi)| < c_{23} \log q$ (" " ")

$$L(1,\chi) = L(1,\chi) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{L(\beta,\chi)}} < (1-\beta)\, c_{22} \cdot \log^2 q$$

$$\Rightarrow \beta < 1 - \frac{c_{23}}{q^{1/2} \cdot \log^2 q}.$$

Obs: $\chi(-1) = 1 \leadsto d > 0$

en ese caso $L(1,\chi) > \tilde{c}_{21} \cdot q^{-1/2} \cdot \log q$

$\left(\log \varepsilon_q \geq \log\left(\frac{1+q^{1/2}}{2}\right)\right)$

Siegel $L(1,\chi) > C_1(\varepsilon) \cdot q^{-\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(d) > C_2(\varepsilon)\, d^{1/2-\varepsilon} & d<0 \\ h(d)\cdot \log \varepsilon_d > C_2(\varepsilon) \cdot d^{1/2-\varepsilon} & d>0 \end{cases}$$

(Se conjetura que $h(d)=1$ para $\approx 74\%$ de los d)

$\nexists$ $\beta < 1 - C_3(\varepsilon) \cdot q^{-\varepsilon}$

NO ES EFECTIVO