$\boxed{19}$ Formula explícita para $\psi(x,\chi)$.

$$\psi_0(x,\chi) = \sum_{n\leq x} \chi(n)\Lambda(n) - \frac{\chi(x)\Lambda(x)}{2}.$$

<u>idea general es la misma.</u> $\frac{L'}{L}$ en lugar de $\frac{\zeta'}{\zeta}$.

<u>miramos residuos:</u> $-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \cdot \frac{x^s}{s}$.

polos $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{ceros de } L \\ s=0 \end{cases}$ ($s=0$ puede ser doble si $\chi(-1)=1$)

$\boxed{\chi(-1)=-1}$ $\rightarrow$ ceros triviales en enteros negativos impares.

$$\longrightarrow \psi_0(x,\chi) = \overbrace{-\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}}\ \overbrace{-\underbrace{\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}}}^{b(\chi)} + \overbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{1-2m}}{2m-1}}^{\text{ceros triviales}}$$

fórmula relaciona con $B(\chi)$

$\boxed{\chi(-1)=+1}$ ceros triviales en ent negativos pares y $s=0$

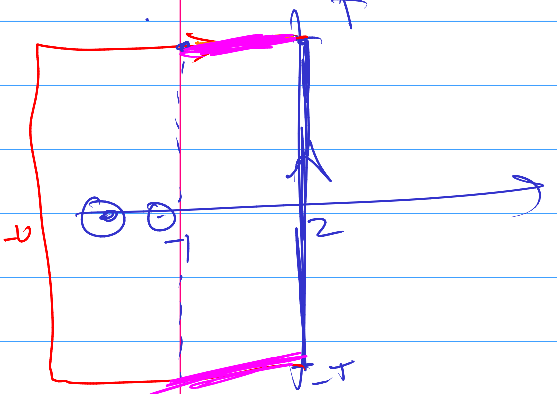
$$\begin{cases} \dfrac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \dfrac{1}{s} + b(\chi) + \cdots \\[2ex] \dfrac{x^s}{s} = \dfrac{1}{s} + \log x + \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{s^2} + \frac{(b + \log x)}{s} + \cdots$$

$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{2m}$$

La dem es similar.

① $-1 \leq \sigma \leq 2$ $\qquad \dfrac{L'(\sigma \pm iT,\chi)}{L(\sigma \pm iT,\chi)} = O(\log^2 qT)$.



$$\int \ll \frac{x \log^2 qT}{T \log x}$$

uso ec. funci.

② $\sigma \leq -1$ $\qquad \dfrac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = O(\log(q|s|))$

lejos de ceros triviales

$$\int \ll \frac{\log q \cdot T}{T x \log x}$$

$a = \begin{cases} 0 & \chi(-1) = 1 \\ 1 & \chi(-1) = -1 \end{cases}$

Teo

$$\psi_0(x,\chi) = -\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - (1-a)\log x - b(\chi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{a-2m}}{2m-a} + R(x,T)$$

donde

$$R(x,T) \ll \frac{x}{T}\log^2(qxT) + \underbrace{\log x \min\left(1, \frac{x}{T\langle x\rangle}\right)}$$

(Se puede sacar si $x \in \mathbb{Z}$)

Dos detalles:

1. $b(\chi)$

2. regiones sin ceros tienen "excepciones" (ceros de Siegel-Landau)

1. $b(\chi) = O(\log q) - \sum_{|\gamma|<1} \frac{1}{\rho}$

$\boxed{x \in \mathbb{Z},\ T \le x}$

$$\rightsquigarrow \psi(x,\chi) = -\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{|\gamma|<1} \frac{1}{\rho} + R_2(x,T)$$

con $R_2(x,T) \ll \frac{x}{T}\log^2 qx$

(2) Regiones casi sin ceros:

$\beta > 1 - c/\log q$ hay a lo sumo un cero. β_1

$\left(c < \frac{1}{4} \to \beta_1 > \frac{3}{4}\right)$

Teo $\boxed{2 \leq T \leq X}$

$$\psi(x,\chi) = -\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{|\gamma|<T}' \frac{x^{\rho}}{\rho} + R_3(x,T)$$

con $|R_3(x,T)| \ll \frac{x}{T}\log^2(qx) + x^{1/4}\log x$

Sólo si χ es real

y hay un cero excepcional)