Elementos de Stark y elementos de Weil para $\mathbb{G}_m$

Daniel Macías Castillo
(con D. Burns y S. Seo)

18/11/2021

Conjectura de Stark

L/K extensión finita Galois de cuerpos globales, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$,
$S \supseteq S_\infty(K) \cup S_{\mathrm{ram}}(L/K)$.

$$\widehat{G} := \{\text{caracteres complejos irreducibles de } G\}$$

$$r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{z=0} L_S(\chi, z) = \begin{cases} \sum_{v\in S} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0(G_v, V_\chi)\big), & \chi \neq \mathbf{1}, \\ |S| - 1, & \chi = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$L_S^*(\chi, 0) = \lim_{z\to 0}\big(z^{-r_S(\chi)} \cdot L_S(\chi, z)\big) \in \mathbb{C}^\times$$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{\chi\in\widehat{G}} \mathbb{C}e_\chi.$$

Conjectura de Stark

L/K extensión finita Galois de cuerpos globales, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$, $S \supseteq S_\infty(K) \cup S_{\mathrm{ram}}(L/K)$.

$$\widehat{G} := \{\text{caracteres complejos irreducibles de } G\}$$

$$r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{z=0} L_S(\chi, z) = \begin{cases} \sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}}\left(H^0(G_v, V_\chi)\right), & \chi \neq \mathbf{1}, \\ |S| - 1, & \chi = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$L_S^*(\chi, 0) = \lim_{z \to 0}\left(z^{-r_S(\chi)} \cdot L_S(\chi, z)\right) \in \mathbb{C}^\times$$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathbb{C} e_\chi .$$

Conjectura de Stark

L/K extensión finita Galois de cuerpos globales, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$, $S \supseteq S_\infty(K) \cup S_{\mathrm{ram}}(L/K)$.

$$\widehat{G} := \{\text{caracteres complejos irreducibles de } G\}$$

$$r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{z=0} L_S(\chi, z) = \begin{cases} \sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0(G_v, V_\chi)\big), & \chi \neq \mathbf{1}, \\ |S| - 1, & \chi = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$L_S^*(\chi, 0) = \lim_{z \to 0}\big(z^{-r_S(\chi)} \cdot L_S(\chi, z)\big) \in \mathbb{C}^\times$$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathbb{C} e_\chi.$$

Conjectura de Stark

L/K extensión finita Galois de cuerpos globales, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$, $S \supseteq S_\infty(K) \cup S_{\mathrm{ram}}(L/K)$.

$$\widehat{G} := \{\text{caracteres complejos irreducibles de } G\}$$

$$r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{z=0} L_S(\chi, z) = \begin{cases} \sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0(G_v, V_\chi)\big), & \chi \neq \mathbf{1}, \\ |S| - 1, & \chi = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$L_S^*(\chi, 0) = \lim_{z \to 0}\big(z^{-r_S(\chi)} \cdot L_S(\chi, z)\big) \in \mathbb{C}^\times$$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathbb{C} e_\chi.$$

Conjectura de Stark

L/K extensión finita Galois de cuerpos globales, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$, $S \supseteq S_\infty(K) \cup S_{\mathrm{ram}}(L/K)$.

$$\widehat{G} := \{\text{caracteres complejos irreducibles de } G\}$$

$$r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{z=0} L_S(\chi, z) = \begin{cases} \sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0(G_v, V_\chi)\big), & \chi \neq \mathbf{1}, \\ |S| - 1, & \chi = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$L_S^*(\chi, 0) = \lim_{z \to 0}\big(z^{-r_S(\chi)} \cdot L_S(\chi, z)\big) \in \mathbb{C}^\times$$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathbb{C} e_\chi.$$

Conjectura de Stark

L/K extensión finita Galois de cuerpos globales, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$, $S \supseteq S_\infty(K) \cup S_{\mathrm{ram}}(L/K)$.

$$\widehat{G} := \{\text{caracteres complejos irreducibles de } G\}$$

$$r_S(\chi) := \mathrm{ord}_{z=0} L_S(\chi, z) = \begin{cases} \sum_{v \in S} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0(G_v, V_\chi)\big), & \chi \neq \mathbf{1}, \\ |S| - 1, & \chi = \mathbf{1} \end{cases}$$

$$L_S^*(\chi, 0) = \lim_{z\to 0}\big(z^{-r_S(\chi)} \cdot L_S(\chi, z)\big) \in \mathbb{C}^\times$$

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} \mathbb{C} e_\chi.$$

Conjectura de Stark

Para $a \geqslant 0$, sea

$$\widehat{G}_a := \{\chi \in \widehat{G} : \ r_S(\chi) = a \cdot \chi(1)\},$$

$$\begin{aligned}\theta^{(a)}_{L/K,S}(0) &:= \sum_{\chi \in \widehat{G}_a} L^*_S(\chi, 0) \cdot e_\chi & \in Z(\mathbb{R}[G]) \\ &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{\chi \in \widehat{G}_a} \frac{\chi(1)\chi(g)}{|G|} \cdot L^*_S(\chi, 0) \right) \cdot g & .\end{aligned}$$

Interesante para $r \leqslant a \leqslant |S|$, con $r := |V|$, $V := \{v \in S : \ G_v = 0\}$.

Conjectura de Stark

Para $a \geqslant 0$, sea

$$\widehat{G}_a := \{\chi \in \widehat{G} : \ r_S(\chi) = a \cdot \chi(1)\},$$

$$\theta^{(a)}_{L/K,S}(0) := \sum_{\chi \in \widehat{G}_a} L^*_S(\chi, 0) \cdot e_\chi \qquad \in Z(\mathbb{R}[G])$$

$$= \sum_{g \in G} \left(\sum_{\chi \in \widehat{G}_a} \frac{\chi(1)\chi(g)}{|G|} \cdot L^*_S(\chi, 0) \right) \cdot g \qquad .$$

Interesante para $r \leqslant a \leqslant |S|$, con $r := |V|$, $V := \{v \in S : \ G_v = 0\}$.

Conjectura de Stark

Para $a \geqslant 0$, sea

$$\widehat{G}_a := \{\chi \in \widehat{G} : \ r_S(\chi) = a \cdot \chi(1)\},$$

$$\begin{aligned}\theta^{(a)}_{L/K,S}(0) &:= \sum_{\chi \in \widehat{G}_a} L^*_S(\chi, 0) \cdot e_\chi \qquad\qquad \in Z(\mathbb{R}[G]) \\ &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{\chi \in \widehat{G}_a} \frac{\chi(1)\chi(g)}{|G|} \cdot L^*_S(\chi, 0) \right) \cdot g \qquad .\end{aligned}$$

Interesante para $r \leqslant a \leqslant |S|$, con $r := |V|$, $V := \{v \in S : \ G_v = 0\}$.

Conjectura de Stark

Para $a \geqslant 0$, sea

$$\widehat{G}_a := \{\chi \in \widehat{G} : \ r_S(\chi) = a \cdot \chi(1)\},$$

$$\begin{aligned} \theta^{(a)}_{L/K,S}(0) &:= \sum_{\chi \in \widehat{G}_a} L^*_S(\chi, 0) \cdot e_\chi & \in Z(\mathbb{R}[G]) \\ &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{\chi \in \widehat{G}_a} \frac{\chi(1)\chi(g)}{|G|} \cdot L^*_S(\chi, 0) \right) \cdot g & . \end{aligned}$$

Interesante para $r \leqslant a \leqslant |S|$, con $r := |V|$, $V := \{v \in S : \ G_v = 0\}$.

Conjectura de Stark

$$\mathcal{O}_{L,S}^{\times} := \{u \in L : |u|_w = 1 \text{ para toda } w \notin S_L\}$$

$$0 \to X_{L,S} \longrightarrow \bigoplus_{w \in S_L} \mathbb{Z}w \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0$$

$$R_{L,S} : \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}_{L,S}^{\times} \cong \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad R_{L,S}(u) := -\sum_{w \in S_L} \log|u|_w \cdot w.$$

Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, X_{L,S})$,

$$\mathscr{L}(\phi) := \mathrm{Nrd}_{\mathbb{R}[G]}\big((\mathbb{R} \cdot \phi) \circ R_{L,S}^{-1}\big) \in Z(\mathbb{R}[G]).$$

Conjetura de Stark para L/K

Para todo a y ϕ, el producto $\theta_{L/K,S}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Q}[G]$.

Conjectura de Stark

$$\mathcal{O}_{L,S}^{\times} := \{u \in L : |u|_w = 1 \text{ para toda } w \notin S_L\}$$

$$0 \to X_{L,S} \longrightarrow \bigoplus_{w \in S_L} \mathbb{Z}w \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0$$

$$R_{L,S} : \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}_{L,S}^{\times} \cong \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad R_{L,S}(u) := -\sum_{w \in S_L} \log|u|_w \cdot w.$$

Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, X_{L,S})$,

$$\mathscr{L}(\phi) := \mathrm{Nrd}_{\mathbb{R}[G]}\left((\mathbb{R} \cdot \phi) \circ R_{L,S}^{-1}\right) \in Z(\mathbb{R}[G]).$$

Conjetura de Stark para L/K

Para todo a y ϕ, el producto $\theta_{L/K,S}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Q}[G]$.

Conjectura de Stark

$$\mathcal{O}_{L,S}^{\times} := \{u \in L : |u|_w = 1 \text{ para toda } w \notin S_L\}$$

$$0 \to X_{L,S} \longrightarrow \bigoplus_{w \in S_L} \mathbb{Z}w \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0$$

$$R_{L,S} : \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}_{L,S}^{\times} \cong \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad R_{L,S}(u) := -\sum_{w \in S_L} \log|u|_w \cdot w.$$

Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, X_{L,S})$,

$$\mathscr{L}(\phi) := \mathrm{Nrd}_{\mathbb{R}[G]}\big((\mathbb{R} \cdot \phi) \circ R_{L,S}^{-1}\big) \in Z(\mathbb{R}[G]).$$

Conjectura de Stark para L/K

Para todo a y ϕ, el producto $\theta_{L/K,S}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Q}[G]$.

Conjectura de Stark

$$\mathcal{O}_{L,S}^{\times} := \{u \in L : |u|_w = 1 \text{ para toda } w \notin S_L\}$$

$$0 \to X_{L,S} \longrightarrow \bigoplus_{w \in S_L} \mathbb{Z}w \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0$$

$$R_{L,S} : \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}_{L,S}^{\times} \cong \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad R_{L,S}(u) := -\sum_{w \in S_L} \log|u|_w \cdot w.$$

Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, X_{L,S})$,

$$\mathscr{L}(\phi) := \mathrm{Nrd}_{\mathbb{R}[G]}\big((\mathbb{R} \cdot \phi) \circ R_{L,S}^{-1}\big) \in Z(\mathbb{R}[G]).$$

Conjetura de Stark para L/K

Para todo a y ϕ, el producto $\theta_{L/K,S}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Q}[G]$.

Conjectura de Stark

$$\mathcal{O}_{L,S}^{\times} := \{u \in L : |u|_w = 1 \text{ para toda } w \notin S_L\}$$

$$0 \to X_{L,S} \longrightarrow \bigoplus_{w \in S_L} \mathbb{Z}w \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0$$

$$R_{L,S} : \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}_{L,S}^{\times} \cong \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad R_{L,S}(u) := -\sum_{w \in S_L} \log|u|_w \cdot w.$$

Dada $\phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, X_{L,S})$,

$$\mathscr{L}(\phi) := \mathrm{Nrd}_{\mathbb{R}[G]}\big((\mathbb{R} \cdot \phi) \circ R_{L,S}^{-1}\big) \in Z(\mathbb{R}[G]).$$

Conjetura de Stark para L/K

Para todo a y ϕ, el producto $\theta_{L/K,S}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Q}[G]$.

¿Conjeturas de Integralidad?

Sea T con $T \cap S = \varnothing$, tal que

$$\mathcal{O}_{L,S,T}^{\times} := \{u \in \mathcal{O}_{L,S}^{\times} : |u-1|_w < 1 \text{ para toda } w \in T_L\}$$

es libre de torsión. Ponemos

$$\theta_{S,T}^{(a)}(0) := \left(\prod_{v \in T} \mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(1 - \mathrm{N}v \cdot \mathrm{Fr}_v^{-1})\right) \cdot \theta_{L/K,S}^{(a)}(0).$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana y $a = r$, el producto $\theta_{S,T}^{(r)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Z}[G]$ para todo ϕ.

La generalización obvia no se cumple en el caso no-abeliano.

¿Conjeturas de Integralidad?

Sea T con $T \cap S = \varnothing$, tal que

$$\mathcal{O}_{L,S,T}^{\times} := \{u \in \mathcal{O}_{L,S}^{\times} : |u-1|_w < 1 \text{ para toda } w \in T_L\}$$

es libre de torsión. Ponemos

$$\theta_{S,T}^{(a)}(0) := \left(\prod_{v \in T} \mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(1 - \mathrm{N}v \cdot \mathrm{Fr}_v^{-1})\right) \cdot \theta_{L/K,S}^{(a)}(0).$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana y $a = r$, el producto $\theta_{S,T}^{(r)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Z}[G]$ para todo ϕ.

La generalización obvia no se cumple en el caso no-abeliano.

¿Conjeturas de Integralidad?

Sea T con $T \cap S = \varnothing$, tal que

$$\mathcal{O}_{L,S,T}^{\times} := \{u \in \mathcal{O}_{L,S}^{\times} : |u-1|_w < 1 \text{ para toda } w \in T_L\}$$

es libre de torsión. Ponemos

$$\theta_{S,T}^{(a)}(0) := \left(\prod_{v \in T} \mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(1 - \mathrm{N}v \cdot \mathrm{Fr}_v^{-1})\right) \cdot \theta_{L/K,S}^{(a)}(0).$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana y $a = r$, el producto $\theta_{S,T}^{(r)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Z}[G]$ para todo ϕ.

La generalización obvia no se cumple en el caso no-abeliano.

¿Conjeturas de Integralidad?

Sea T con $T \cap S = \varnothing$, tal que

$$\mathcal{O}_{L,S,T}^{\times} := \{u \in \mathcal{O}_{L,S}^{\times} : |u-1|_w < 1 \text{ para toda } w \in T_L\}$$

es libre de torsión. Ponemos

$$\theta_{S,T}^{(a)}(0) := \left(\prod_{v \in T} \mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(1 - \mathrm{N}v \cdot \mathrm{Fr}_v^{-1})\right) \cdot \theta_{L/K,S}^{(a)}(0).$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana y $a = r$, el producto $\theta_{S,T}^{(r)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi)$ pertenece a $\mathbb{Z}[G]$ para todo ϕ.

La generalización obvia no se cumple en el caso no-abeliano.

Contraejemplo (Nomura)

Sea α raíz de $X^3 - 11X + 7$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{4001}, \alpha)$,
$S = \{\infty, 3, 4001\}$, $T = \{7\}$, $a = 0$.

$$G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 = \langle j, \sigma, \tau \rangle.$$

$$\theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \theta_{S,T}^{(0)}(0)$$
$$= \frac{1}{3}(1 - j)\big(3410 - 1774(\sigma + \sigma^2) + 44(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau)\big) \notin \mathbb{Z}[G]$$

En general, para $a = 0$,

$$\theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \sum_{\chi \in \widehat{G}_0} \theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot (e_\chi \cdot \mathscr{L}(\phi)) = \theta_{S,T}^{(0)}(0)$$

con $\widehat{G}_0 = \{\chi : e_\chi(\mathbb{C} \cdot X_{L,S}) = 0\}$.

¿Conjeturas de Integralidad?

Contraejemplo (Nomura)

Sea α raíz de $X^3 - 11X + 7$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{4001}, \alpha)$,
$S = \{\infty, 3, 4001\}$, $T = \{7\}$, $a = 0$.

$$G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 = \langle j, \sigma, \tau \rangle.$$

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \theta^{(0)}_{S,T}(0)$$
$$= \frac{1}{3}(1-j)\big(3410 - 1774(\sigma + \sigma^2) + 44(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau)\big) \notin \mathbb{Z}[G]$$

En general, para $a = 0$,

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \sum_{\chi \in \widehat{G}_0} \theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot (e_\chi \cdot \mathscr{L}(\phi)) = \theta^{(0)}_{S,T}(0)$$

con $\widehat{G}_0 = \{\chi : e_\chi(\mathbb{C} \cdot X_{L,S}) = 0\}$.

Contraejemplo (Nomura)

Sea α raíz de $X^3 - 11X + 7$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{4001}, \alpha)$,
$S = \{\infty, 3, 4001\}$, $T = \{7\}$, $a = 0$.

$$G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 = \langle j, \sigma, \tau \rangle.$$

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \theta^{(0)}_{S,T}(0)$$
$$= \frac{1}{3}(1-j)\big(3410 - 1774(\sigma + \sigma^2) + 44(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau)\big) \notin \mathbb{Z}[G]$$

En general, para $a = 0$,

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \sum_{\chi \in \widehat{G}_0} \theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot (e_\chi \cdot \mathscr{L}(\phi)) = \theta^{(0)}_{S,T}(0)$$

con $\widehat{G}_0 = \{\chi : e_\chi(\mathbb{C} \cdot X_{L,S}) = 0\}$.

¿Conjeturas de Integralidad?

Contraejemplo (Nomura)

Sea α raíz de $X^3 - 11X + 7$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{4001}, \alpha)$,
$S = \{\infty, 3, 4001\}$, $T = \{7\}$, $a = 0$.

$$G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 = \langle j, \sigma, \tau \rangle.$$

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \theta^{(0)}_{S,T}(0)$$

$$= \frac{1}{3}(1-j)\big(3410 - 1774(\sigma + \sigma^2) + 44(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau)\big) \notin \mathbb{Z}[G]$$

En general, para $a = 0$,

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \sum_{\chi \in \widehat{G}_0} \theta^{(0)}_{S,T}(0) \cdot (e_\chi \cdot \mathscr{L}(\phi)) = \theta^{(0)}_{S,T}(0)$$

con $\widehat{G}_0 = \{\chi : e_\chi(\mathbb{C} \cdot X_{L,S}) = 0\}$.

¿Conjeturas de Integralidad?

Contraejemplo (Nomura)

Sea α raíz de $X^3 - 11X + 7$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{4001}, \alpha)$,
$S = \{\infty, 3, 4001\}$, $T = \{7\}$, $a = 0$.

$$G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 = \langle j, \sigma, \tau \rangle.$$

$$\theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \theta_{S,T}^{(0)}(0)$$
$$= \frac{1}{3}(1 - j)\big(3410 - 1774(\sigma + \sigma^2) + 44(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau)\big) \notin \mathbb{Z}[G]$$

En general, para $a = 0$,

$$\theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \sum_{\chi \in \widehat{G}_0} \theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot (e_\chi \cdot \mathscr{L}(\phi)) = \theta_{S,T}^{(0)}(0)$$

con $\widehat{G}_0 = \{\chi : e_\chi(\mathbb{C} \cdot X_{L,S}) = 0\}$.

¿Conjeturas de Integralidad?

Contraejemplo (Nomura)

Sea α raíz de $X^3 - 11X + 7$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{4001}, \alpha)$,
$S = \{\infty, 3, 4001\}$, $T = \{7\}$, $a = 0$.

$$G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times S_3 = \langle j, \sigma, \tau \rangle.$$

$$\theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \theta_{S,T}^{(0)}(0)$$
$$= \frac{1}{3}(1-j)\big(3410 - 1774(\sigma + \sigma^2) + 44(\tau + \sigma\tau + \sigma^2\tau)\big) \notin \mathbb{Z}[G]$$

En general, para $a = 0$,

$$\theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) = \sum_{\chi \in \widehat{G}_0} \theta_{S,T}^{(0)}(0) \cdot (e_\chi \cdot \mathscr{L}(\phi)) = \theta_{S,T}^{(0)}(0)$$

con $\widehat{G}_0 = \{\chi \,:\, e_\chi(\mathbb{C} \cdot X_{L,S}) = 0\}$.

Burns-Sano han definido, para $a \geqslant 0$ y un G-módulo M, el a-ésimo invariante de Fitting (no-conmutativo) $\mathrm{Fitt}_G^a(M)$ de M.

Teorema 1

Sean L/K cuerpos de funciones. Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de 'denominadores' $\mathcal{D}_{S,T}^a$ tal que

$$\mathcal{D}_{S,T}^a \cdot \theta_{S,T}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \mathrm{Fitt}_G^a\big(\mathrm{Cl}(L)\big).$$

Corolario ($a = 0$)

Si L/K cuerpos de funciones, $\theta_{S,T}^{(0)}(0)$ pertenece a $\mathrm{Fitt}_G^0\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Corolario (Deligne)

Si L/K extensión abeliana de cuerpos de funciones, $\theta_{S,T}^{(0)}(0)$ pertenece a $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Cuerpos de funciones

Burns-Sano han definido, para $a \geqslant 0$ y un G-módulo M, el a-ésimo invariante de Fitting (no-conmutativo) $\mathrm{Fitt}^a_G(M)$ de M.

Teorema 1

Sean L/K cuerpos de funciones. Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de 'denominadores' $\mathcal{D}^a_{S,T}$ tal que

$$\mathcal{D}^a_{S,T} \cdot \theta^{(a)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \mathrm{Fitt}^a_G\big(\mathrm{Cl}(L)\big).$$

Corolario ($a = 0$)

Si L/K cuerpos de funciones, $\theta^{(0)}_{S,T}(0)$ pertenece a $\mathrm{Fitt}^0_G\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Corolario (Deligne)

Si L/K extensión abeliana de cuerpos de funciones, $\theta^{(0)}_{S,T}(0)$ pertenece a $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Cuerpos de funciones

Burns-Sano han definido, para $a \geqslant 0$ y un G-módulo M, el a-ésimo invariante de Fitting (no-conmutativo) $\mathrm{Fitt}_G^a(M)$ de M.

Teorema 1

Sean L/K cuerpos de funciones. Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de 'denominadores' $\mathcal{D}_{S,T}^a$ tal que

$$\mathcal{D}_{S,T}^a \cdot \theta_{S,T}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \mathrm{Fitt}_G^a\big(\mathrm{Cl}(L)\big).$$

Corolario ($a = 0$)

Si L/K cuerpos de funciones, $\theta_{S,T}^{(0)}(0)$ pertenece a $\mathrm{Fitt}_G^0\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Corolario (Deligne)

Si L/K extensión abeliana de cuerpos de funciones, $\theta_{S,T}^{(0)}(0)$ pertenece a $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Cuerpos de funciones

Burns-Sano han definido, para $a \geqslant 0$ y un G-módulo M, el a-ésimo invariante de Fitting (no-conmutativo) $\mathrm{Fitt}_G^a(M)$ de M.

Teorema 1

Sean L/K cuerpos de funciones. Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de 'denominadores' $\mathcal{D}_{S,T}^a$ tal que

$$\mathcal{D}_{S,T}^a \cdot \theta_{S,T}^{(a)}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \mathrm{Fitt}_G^a\big(\mathrm{Cl}(L)\big).$$

Corolario ($a = 0$)

Si L/K cuerpos de funciones, $\theta_{S,T}^{(0)}(0)$ pertenece a $\mathrm{Fitt}_G^0\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Corolario (Deligne)

Si L/K extensión abeliana de cuerpos de funciones, $\theta_{S,T}^{(0)}(0)$ pertenece a $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Cuerpos de funciones

Burns-Sano han definido, para $a \geqslant 0$ y un G-módulo M, el a-ésimo invariante de Fitting (no-conmutativo) $\mathrm{Fitt}^a_G(M)$ de M.

Teorema 1

Sean L/K cuerpos de funciones. Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de 'denominadores' $\mathcal{D}^a_{S,T}$ tal que

$$\mathcal{D}^a_{S,T} \cdot \theta^{(a)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \mathrm{Fitt}^a_G\big(\mathrm{Cl}(L)\big).$$

Corolario ($a = 0$)

Si L/K cuerpos de funciones, $\theta^{(0)}_{S,T}(0)$ pertenece a $\mathrm{Fitt}^0_G\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Corolario (Deligne)

Si L/K extensión abeliana de cuerpos de funciones, $\theta^{(0)}_{S,T}(0)$ pertenece a $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)\big)$.

Cuerpos CM

Teorema 2

Sea K totalmente real, sea L CM, $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula, y
- la Conjetura del Orden de Anulación de Gross se cumple para los caracteres p-ádicos, impares de G.

Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de denominadores $\mathcal{D}^a_{S,T}$ tal que

$$\mathcal{D}^a_{S,T} \cdot \theta^{(a)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \left(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^a_G(\mathrm{Cl}(L))\right).$$

Si $a = 0$ y L/K es abeliana, la afirmación

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \in \left(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^0_G(\mathrm{Cl}(L))\right)$$

ha sido demostrada (incondicionalmente) por Dasgupta-Kakde.

Cuerpos CM

Teorema 2

Sea K totalmente real, sea L CM, $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula, y
- la Conjetura del Orden de Anulación de Gross se cumple para los caracteres p-ádicos, impares de G.

Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de denominadores $\mathcal{D}^{a}_{S,T}$ tal que

$$\mathcal{D}^{a}_{S,T} \cdot \theta^{(a)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \left(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^{a}_{G}(\mathrm{Cl}(L))\right).$$

Si $a = 0$ y L/K es abeliana, la afirmación

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \in \left(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^{0}_{G}(\mathrm{Cl}(L))\right)$$

ha sido demostrada (incondicionalmente) por Dasgupta-Kakde.

Cuerpos CM

Teorema 2

Sea K totalmente real, sea L CM, $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula, y
- la Conjetura del Orden de Anulación de Gross se cumple para los caracteres p-ádicos, impares de G.

Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de denominadores $\mathcal{D}^a_{S,T}$ tal que

$$\mathcal{D}^a_{S,T} \cdot \theta^{(a)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \left(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^a_G(\mathrm{Cl}(L))\right).$$

Si $a = 0$ y L/K es abeliana, la afirmación

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \in \left(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^0_G(\mathrm{Cl}(L))\right)$$

ha sido demostrada (incondicionalmente) por Dasgupta-Kakde.

Teorema 2

Sea K totalmente real, sea L CM, $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula, y
- la Conjetura del Orden de Anulación de Gross se cumple para los caracteres p-ádicos, impares de G.

Para todo $a < |S|$ hay un conjunto de denominadores $\mathcal{D}^a_{S,T}$ tal que

$$\mathcal{D}^a_{S,T} \cdot \theta^{(a)}_{S,T}(0) \cdot \mathscr{L}(\phi) \subseteq \left(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^a_G(\mathrm{Cl}(L))\right).$$

Si $a = 0$ y L/K es abeliana, la afirmación

$$\theta^{(0)}_{S,T}(0) \in \left(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Fitt}^0_G(\mathrm{Cl}(L))\right)$$

ha sido demostrada (incondicionalmente) por Dasgupta-Kakde.

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

El 'orden de Whitehead' $\xi(G)$ de G es el $\mathbb{Z}[G]$-orden en $Z(\mathbb{Q}[G])$ generado por

$$\{\mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(M) : M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathbb{Z}[G])\}.$$

Se tiene $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si y sólo si G es abeliano.

Hay un ´ideal de denominadores' explícito $\mathcal{D}(G)$ tal que

$$\mathcal{D}(G) \cdot \xi(G) = \mathcal{D}(G) \subseteq Z(\mathbb{Z}[G]).$$

También cumple $\mathcal{D}(G) = \xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si G es abeliano.

Por definición, todo $\mathrm{Fitt}^a_G(M)$ es un ideal de $\xi(G)$, y se tiene

$$\mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^a_G(M) \subseteq \mathbb{Z}[G], \quad \mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^0_G(M) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(M).$$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

El 'orden de Whitehead' $\xi(G)$ de G es el $\mathbb{Z}[G]$-orden en $Z(\mathbb{Q}[G])$ generado por

$$\{\mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(M) : M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathbb{Z}[G])\}.$$

Se tiene $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si y sólo si G es abeliano.

Hay un ´ideal de denominadores' explícito $\mathcal{D}(G)$ tal que

$$\mathcal{D}(G) \cdot \xi(G) = \mathcal{D}(G) \subseteq Z(\mathbb{Z}[G]).$$

También cumple $\mathcal{D}(G) = \xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si G es abeliano.

Por definición, todo $\mathrm{Fitt}^a_G(M)$ es un ideal de $\xi(G)$, y se tiene

$$\mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^a_G(M) \subseteq \mathbb{Z}[G], \quad \mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^0_G(M) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(M).$$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

El 'orden de Whitehead' $\xi(G)$ de G es el $\mathbb{Z}[G]$-orden en $Z(\mathbb{Q}[G])$ generado por

$$\{\mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(M) : M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathbb{Z}[G])\}.$$

Se tiene $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si y sólo si G es abeliano.

Hay un ´ideal de denominadores' explícito $\mathcal{D}(G)$ tal que

$$\mathcal{D}(G) \cdot \xi(G) = \mathcal{D}(G) \subseteq Z(\mathbb{Z}[G]).$$

También cumple $\mathcal{D}(G) = \xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si G es abeliano.

Por definición, todo $\mathrm{Fitt}^a_G(M)$ es un ideal de $\xi(G)$, y se tiene

$$\mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^a_G(M) \subseteq \mathbb{Z}[G], \qquad \mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^0_G(M) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(M).$$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

El 'orden de Whitehead' $\xi(G)$ de G es el $\mathbb{Z}[G]$-orden en $Z(\mathbb{Q}[G])$ generado por

$$\{\mathrm{Nrd}_{\mathbb{Q}[G]}(M) : M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathbb{Z}[G])\}.$$

Se tiene $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si y sólo si G es abeliano.

Hay un ´ideal de denominadores' explícito $\mathcal{D}(G)$ tal que

$$\mathcal{D}(G) \cdot \xi(G) = \mathcal{D}(G) \subseteq Z(\mathbb{Z}[G]).$$

También cumple $\mathcal{D}(G) = \xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ si G es abeliano.

Por definición, todo $\mathrm{Fitt}^a_G(M)$ es un ideal de $\xi(G)$, y se tiene

$$\mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^a_G(M) \subseteq \mathbb{Z}[G], \quad \mathcal{D}(G) \cdot \mathrm{Fitt}^0_G(M) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(M).$$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

Para $a \geqslant 0$, funtor $\bigwedge^a_{\mathbb{Q}[G]}$ 'a-ésima potencia exterior reducida', de la cat. de $\mathbb{Q}[G]$-módulos f. g. a la de $Z(\mathbb{Q}[G])$-módulos.

Emparejamiento de dualidad (evaluación)

$$\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} M \times \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(M, \mathbb{Q}[G]) \longrightarrow Z(\mathbb{Q}[G]).$$

El 'a-ésimo retículo de Rubin reducido' de un G-módulo N es el $\xi(G)$-módulo

$$\bigcap_{G}^{a} N := \{x \in \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} (\mathbb{Q} \cdot N) : (\wedge_{i=1}^{i=a} \varphi_i)(x) \in \xi(G)$$

$$\text{para todos } \varphi_1, \ldots, \varphi_a \in \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{Z}[G])\}.$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana, $\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T}$ pertenece a $\bigcap^r_G \mathcal{O}^\times_{L,S,T}$. $\qquad (a = r)$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

Para $a \geqslant 0$, funtor $\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a}$ 'a-ésima potencia exterior reducida', de la cat. de $\mathbb{Q}[G]$-módulos f. g. a la de $Z(\mathbb{Q}[G])$-módulos. Emparejamiento de dualidad (evaluación)

$$\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} M \times \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(M, \mathbb{Q}[G]) \longrightarrow Z(\mathbb{Q}[G]).$$

El 'a-ésimo retículo de Rubin reducido' de un G-módulo N es el $\xi(G)$-módulo

$$\bigcap_{G}^{a} N := \{x \in \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} (\mathbb{Q} \cdot N) : (\wedge_{i=1}^{i=a} \varphi_i)(x) \in \xi(G)$$

$$\text{para todos } \varphi_1, \ldots, \varphi_a \in \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{Z}[G])\}.$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana, $\varepsilon_{L/K,S,T}^{\mathrm{RS}}$ pertenece a $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^{\times}$. $\qquad (a = r)$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

Para $a \geqslant 0$, funtor $\bigwedge^a_{\mathbb{Q}[G]}$ 'a-ésima potencia exterior reducida', de la cat. de $\mathbb{Q}[G]$-módulos f. g. a la de $Z(\mathbb{Q}[G])$-módulos. Emparejamiento de dualidad (evaluación)

$$\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} M \times \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(M, \mathbb{Q}[G]) \longrightarrow Z(\mathbb{Q}[G]).$$

El 'a-ésimo retículo de Rubin reducido' de un G-módulo N es el $\xi(G)$-módulo

$$\bigcap_{G}^{a} N := \{x \in \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} (\mathbb{Q} \cdot N) : (\wedge_{i=1}^{i=a}\varphi_i)(x) \in \xi(G)$$

$$\text{para todos } \varphi_1, \ldots, \varphi_a \in \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{Z}[G])\}.$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana, $\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T}$ pertenece a $\bigcap^r_G \mathcal{O}^\times_{L,S,T}$. $\quad (a = r)$

Álgebra no-conmutativa de Burns-Sano

Para $a \geqslant 0$, funtor $\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^a$ 'a-ésima potencia exterior reducida', de la cat. de $\mathbb{Q}[G]$-módulos f. g. a la de $Z(\mathbb{Q}[G])$-módulos. Emparejamiento de dualidad (evaluación)

$$\bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} M \times \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}[G]}(M, \mathbb{Q}[G]) \longrightarrow Z(\mathbb{Q}[G]).$$

El 'a-ésimo retículo de Rubin reducido' de un G-módulo N es el $\xi(G)$-módulo

$$\bigcap_{G}^{a} N := \{x \in \bigwedge_{\mathbb{Q}[G]}^{a} (\mathbb{Q} \cdot N) : (\wedge_{i=1}^{i=a} \varphi_i)(x) \in \xi(G)$$

$$\text{para todos } \varphi_1, \ldots, \varphi_a \in \mathrm{Hom}_G(N, \mathbb{Z}[G])\}.$$

Conjetura de Rubin (1996)

Si L/K es abeliana, $\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T}$ pertenece a $\bigcap_G^r \mathcal{O}^\times_{L,S,T}$. $\quad (a = r)$

Elementos de Weil

Recordamos $r := |V|$ con $V := \{v \in S : G_v = 0\}$. Sea $v_0 \in S \setminus V$ y $U := S_K^\infty \cup V \cup \{v_0\}$.

Teorema 3

Hay un $\xi(G)$-submódulo cíclico canónico $\mathcal{W}$ de $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^\times$ tal que

$$x \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_U(L))$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^\times, \mathbb{Z}[G])$ y $x \in \mathcal{D}(G)$.

De hecho, el conjunto $\{(\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) : \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varepsilon\}$ determina un invariante de Fitting asociado al 'grupo de Selmer' $\mathrm{Sel}_S(L)$.

$$0 \to \mathrm{Cl}_S(L) \longrightarrow \mathrm{Sel}_S(L) \longrightarrow X_{L,S} \to 0$$

Elementos de Weil

Recordamos $r := |V|$ con $V := \{v \in S : G_v = 0\}$. Sea $v_0 \in S \backslash V$ y $U := S_K^{\infty} \cup V \cup \{v_0\}$.

Teorema 3

Hay un $\xi(G)$-submódulo cíclico canónico $\mathcal{W}$ de $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^{\times}$ tal que

$$x \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_U(L))$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^{\times}, \mathbb{Z}[G])$ y $x \in \mathcal{D}(G)$.

De hecho, el conjunto $\{(\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) : \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varepsilon\}$ determina un invariante de Fitting asociado al 'grupo de Selmer' $\mathrm{Sel}_S(L)$.

$$0 \to \mathrm{Cl}_S(L) \longrightarrow \mathrm{Sel}_S(L) \longrightarrow X_{L,S} \to 0$$

Elementos de Weil

Recordamos $r := |V|$ con $V := \{v \in S : G_v = 0\}$. Sea $v_0 \in S \backslash V$ y $U := S_K^\infty \cup V \cup \{v_0\}$.

Teorema 3

Hay un $\xi(G)$-submódulo cíclico canónico $\mathcal{W}$ de $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^\times$ tal que

$$x \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_U(L))$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^\times, \mathbb{Z}[G])$ y $x \in \mathcal{D}(G)$.

De hecho, el conjunto $\{(\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) : \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varepsilon\}$ determina un invariante de Fitting asociado al 'grupo de Selmer' $\mathrm{Sel}_S(L)$.

$$0 \to \mathrm{Cl}_S(L) \longrightarrow \mathrm{Sel}_S(L) \longrightarrow X_{L,S} \to 0$$

Elementos de Weil

Recordamos $r := |V|$ con $V := \{v \in S : G_v = 0\}$. Sea $v_0 \in S \backslash V$ y $U := S_K^\infty \cup V \cup \{v_0\}$.

Teorema 3

Hay un $\xi(G)$-submódulo cíclico canónico $\mathcal{W}$ de $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^\times$ tal que

$$x \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_U(L))$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^\times, \mathbb{Z}[G])$ y $x \in \mathcal{D}(G)$.

De hecho, el conjunto $\{(\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) : \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varepsilon\}$ determina un invariante de Fitting asociado al 'grupo de Selmer' $\mathrm{Sel}_S(L)$.

$$0 \to \mathrm{Cl}_S(L) \longrightarrow \mathrm{Sel}_S(L) \longrightarrow X_{L,S} \to 0$$

Elementos de Weil

Recordamos $r := |V|$ con $V := \{v \in S : G_v = 0\}$. Sea $v_0 \in S \backslash V$ y $U := S_K^\infty \cup V \cup \{v_0\}$.

Teorema 3

Hay un $\xi(G)$-submódulo cíclico canónico $\mathcal{W}$ de $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^\times$ tal que

$$x \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_U(L))$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^\times, \mathbb{Z}[G])$ y $x \in \mathcal{D}(G)$.

De hecho, el conjunto $\{(\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) : \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \varepsilon\}$ determina un invariante de Fitting asociado al 'grupo de Selmer' $\mathrm{Sel}_S(L)$.

$$0 \to \mathrm{Cl}_S(L) \longrightarrow \mathrm{Sel}_S(L) \longrightarrow X_{L,S} \to 0$$

Recordamos $r := |V|$ con $V := \{v \in S : \; G_v = 0\}$. Sea $v_0 \in S \backslash V$ y $U := S_K^\infty \cup V \cup \{v_0\}$.

Teorema 3

Hay un $\xi(G)$-submódulo cíclico canónico $\mathcal{W}$ de $\bigcap_G^r \mathcal{O}_{L,S,T}^\times$ tal que

$$x \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathrm{Cl}_U(L))$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{W}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^\times, \mathbb{Z}[G])$ y $x \in \mathcal{D}(G)$.

De hecho, el conjunto $\{(\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon) : \; \varphi_1, \ldots, \varphi_r, \; \varepsilon\}$ determina un invariante de Fitting asociado al 'grupo de Selmer' $\mathrm{Sel}_S(L)$.

$$0 \to \mathrm{Cl}_S(L) \longrightarrow \mathrm{Sel}_S(L) \longrightarrow X_{L,S} \to 0$$

Unidades ciclotómicas como elementos de Weil

Proposición

Si $K = \mathbb{Q}$ y L cuerpo abeliano real de conductor m, tomamos $S = \{\infty\} \cup \{p : p \mid m\}$ con $V = \{\infty\}$ y $r = 1$.

Entonces $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{O}_{L,S}^{\times}$ está generado sobre $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ por

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})/L}\left(1 - e^{2\pi i/m}\right)^{1/2}.$$

Corolario (Rubin)

Para cualquier $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, \mathbb{Z}[G])$ y $g \in G$ el elemento

$$(g-1)\cdot\varphi\left(\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})/L}(1 - e^{2\pi i/m})^{1/2}\right)$$

anula $\mathrm{Cl}(L)$.

Unidades ciclotómicas como elementos de Weil

Proposición

Si $K = \mathbb{Q}$ y L cuerpo abeliano real de conductor m, tomamos $S = \{\infty\} \cup \{p : p \mid m\}$ con $V = \{\infty\}$ y $r = 1$.

Entonces $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{O}_{L,S}^{\times}$ está generado sobre $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ por

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})/L}\left(1 - e^{2\pi i/m}\right)^{1/2}.$$

Corolario (Rubin)

Para cualquier $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, \mathbb{Z}[G])$ y $g \in G$ el elemento

$$(g-1)\cdot\varphi\left(\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})/L}(1 - e^{2\pi i/m})^{1/2}\right)$$

anula $\mathrm{Cl}(L)$.

Unidades ciclotómicas como elementos de Weil

Proposición

Si $K = \mathbb{Q}$ y L cuerpo abeliano real de conductor m, tomamos $S = \{\infty\} \cup \{p : p \mid m\}$ con $V = \{\infty\}$ y $r = 1$.

Entonces $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{O}_{L,S}^{\times}$ está generado sobre $\xi(G) = \mathbb{Z}[G]$ por

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})/L}\left(1 - e^{2\pi i/m}\right)^{1/2}.$$

Corolario (Rubin)

Para cualquier $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S}^{\times}, \mathbb{Z}[G])$ y $g \in G$ el elemento

$$(g-1)\cdot\varphi\left(\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})/L}(1 - e^{2\pi i/m})^{1/2}\right)$$

anula $\mathrm{Cl}(L)$.

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : \bigwedge\nolimits_{\mathbb{R}[G]}^{r} \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}_{L,S}^{\times} \xrightarrow{\sim} \bigwedge\nolimits_{\mathbb{R}[G]}^{r} \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon_{L/K,S,T}^{\mathrm{RS}} := \lambda_{L,S}^{-1}\left(\theta_{S,T}^{(r)}(0) \cdot \wedge_{i=1}^{i=r}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G) \cdot \varepsilon_{L/K,S,T}^{\mathrm{RS}} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap\nolimits_{G}^{r} \mathcal{O}_{L,S,T}^{\times}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon_{L/K,S,T}^{\mathrm{RS}})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : {\bigwedge}^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} {\bigwedge}^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0) \cdot \wedge_{i=1}^{i=r}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G) \cdot \varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap_G^r \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R}\cdot\mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R}\cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1,\ldots,w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0)\cdot\wedge^{i=r}_{i=1}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G)\cdot\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap\nolimits^r_G \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R}\cdot\mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R}\cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0)\cdot \wedge_{i=1}^{i=r}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G)\cdot\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap_G^r \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

$$\lambda_{L,S} : \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0) \cdot \wedge^{i=r}_{i=1}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G) \cdot \varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap\nolimits^r_G \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : {\bigwedge}^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} {\bigwedge}^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0) \cdot \wedge_{i=1}^{i=r}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G) \cdot \varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap_G^r \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : \bigwedge^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0) \cdot \wedge^{i=r}_{i=1}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G) \cdot \varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap_G^r \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Elementos de Stark

$$\lambda_{L,S} : \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot \mathcal{O}^\times_{L,S} \xrightarrow{\sim} \bigwedge\nolimits^r_{\mathbb{R}[G]} \mathbb{R} \cdot X_{L,S}, \qquad V_L = \{w_1, \ldots, w_r\}.$$

Definición

El 'elemento de Rubin-Stark (no-abeliano)' de L/K, S y T es

$$\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} := \lambda^{-1}_{L,S}\left(\theta^{(r)}_{S,T}(0) \cdot \wedge_{i=1}^{i=r}(w_i - w_0)\right).$$

Teorema 4

Si la Conjetura Equivariante de los Números de Tamagawa (Burns-Flach) es válida para L/K, entonces

$$\xi(G) \cdot \varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T} = \mathcal{W} \subseteq \bigcap_G^r \mathcal{O}^\times_{L,S,T}.$$

(Variando L en familias, $(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T})_L$ forma un 'sistema de Euler no-conmutativo de rango superior', a la Burns-Sano.)

Cuerpos totalmente reales

Teorema 5

Sea L totalmente real y sea L/K ramificada. Sea $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula,
- toda plaza p-ádica de K tiene ramificación suave en L, y
- la Conjetura de Stark p-ádica en $s = 1$ se cumple para los caracteres p-ádicos de G.

Sea $r := [K : \mathbb{Q}]$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_{L,S,T}^{\times}, \mathbb{Z}[G])$. Entonces

$$x \cdot (g-1) \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r}\varphi_i)\big(\varepsilon_{L/K,S,T}^{\mathrm{RS}}\big) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_{(p)}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)_{(p)}\big)$$

para cualquier $x \in \mathcal{D}(G)$, $v \in S_{\mathrm{ram}}(L/K)$ y $g \in G_v$.

Teorema 5

Sea L totalmente real y sea L/K ramificada. Sea $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula,
- toda plaza p-ádica de K tiene ramificación suave en L, y
- la Conjetura de Stark p-ádica en $s = 1$ se cumple para los caracteres p-ádicos de G.

Sea $r := [K : \mathbb{Q}]$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}^\times_{L,S,T}, \mathbb{Z}[G])$. Entonces

$$x \cdot (g - 1) \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)\big(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T}\big) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_{(p)}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)_{(p)}\big)$$

para cualquier $x \in \mathcal{D}(G)$, $v \in S_{\mathrm{ram}}(L/K)$ y $g \in G_v$.

Cuerpos totalmente reales

Teorema 5

Sea L totalmente real y sea L/K ramificada. Sea $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula,
- toda plaza p-ádica de K tiene ramificación suave en L, y
- la Conjetura de Stark p-ádica en $s = 1$ se cumple para los caracteres p-ádicos de G.

Sea $r := [K : \mathbb{Q}]$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}^{\times}_{L,S,T}, \mathbb{Z}[G])$. Entonces

$$x \cdot (g-1) \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T}) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_{(p)}[G]}(\mathrm{Cl}(L)_{(p)})$$

para cualquier $x \in \mathcal{D}(G)$, $v \in S_{\mathrm{ram}}(L/K)$ y $g \in G_v$.

Cuerpos totalmente reales

Teorema 5

Sea L totalmente real y sea L/K ramificada. Sea $p \neq 2$ tal que

- el μ-invariante ciclotómico p-ádico de L se anula,
- toda plaza p-ádica de K tiene ramificación suave en L, y
- la Conjetura de Stark p-ádica en $s = 1$ se cumple para los caracteres p-ádicos de G.

Sea $r := [K : \mathbb{Q}]$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}^\times_{L,S,T}, \mathbb{Z}[G])$. Entonces

$$x \cdot (g - 1) \cdot (\wedge_{i=1}^{i=r} \varphi_i)\big(\varepsilon^{\mathrm{RS}}_{L/K,S,T}\big) \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_{(p)}[G]}\big(\mathrm{Cl}(L)_{(p)}\big)$$

para cualquier $x \in \mathcal{D}(G)$, $v \in S_{\mathrm{ram}}(L/K)$ y $g \in G_v$.