Curvas bielípticas

Francesc Bars (UAB)

Seminario LaTeN, 25/XI/2021

Curvas bielípticas

Francesc Bars (UAB)

Seminario LaTeN, 25/XI/2021

Curvas bielípticas

$X_{|K}$ curva lisa y proyectiva definida sobre un campo de números K.

g_X género de X

$X(K)$ el conjunto de puntos K-racional

$\overline{K}$ una clausura algebraica fija de K, y siempre L/K ext. finita $L \subseteq \overline{K}$.

Por un teorema de Faltings:

$$|X(K)| = \infty \Rightarrow g_X \leq 1 \,.$$

El opuesto es falso : Si $g \leq 1$, puede suceder $X(K) = \emptyset$.

Si $|X(K)| > 0$ y $g_X = 0$, entonces $|X(K)| = \infty$.

Si $|X(K)| > 0$ y $g_X = 1$, puede ser $|X(K)| < \infty$.

Puntos Cuadráticos

Sea $g_X > 1$, y denotemos

$$\Gamma_2(X,K) := \cup_{[L:K]\leq 2} X(L).$$

Suponemos que X tiene una involución u definida sobre K que cumple $g_{X_u} \leq 1$ donde $X_u := X/u$ (curva hiperelíptica o bielíptica sobre K, respectivamente).

Si $|X_u(K)| = \infty \Rightarrow |\Gamma_2(X,K)| = \infty$.

El opuesto es cierto (Abramovich-Harris-Silverman).

Un resultado más débil es el que sigue

Teorema (Harris-Silverman)

Supongamos $g_X \geq 2$. Entonces $\exists L/K$ extension finita de cuerpos con $|\Gamma_2(X,L)| = \infty$ si i solo si C es hiperelíptica o bielíptica (i.e., tiene morfismo de grado 2 sobre $\overline{K}$

$$\varphi : X \to \mathbb{P}^1; \ or \ \ E$$

a la recta projectiva o a una curva elíptica)

En general para cuerpos globales k tenemos:

Proposición

Supongamos $g_X \geq 2$. Entonces,

(i) *X_k es hiperelíptica siI existe una involución (hiperelíptica) $w \in \mathrm{Aut}(X_{\overline{k}})$, con $2g_X + 2$ puntos fijos. En particular, si X_k es hiperelíptica, entonces w es única, definida sobre una ext. finita puramente inseparable ℓ/k de k, y se le llama la involución hiperelíptica de X_k.*

(ii) *X_k es bielíptica siI existe una involución (bielíptica) $\tilde{w} \in \mathrm{Aut}(X_{\overline{k}})$, con $2g_X - 2$ puntos fijos. Si X_k es bielíptica y $g_X \geq 6$, entonces existe una única involución bielíptica, la cual pertenece al centro de $\mathrm{Aut}(X_{\overline{k}})$ y está definida sobre una ext. finita puramente inseparable ℓ de k.*

Proposición (Accola-Landman,Harris-Silverman)

Si X es bielíptica y $f : X \to X'$ mapeo finito entonces X' es bielíptica o hiperelíptica o $g_{X'} \leq 1$.

Teorema (Schweizer)

X_k definida sobre un cuerpo global k de $char = p > 0$, conservativa sobre k. Supongamos $g_X \geq 3$ y $Jac(X_k \times_k \overline{k})$ no tiene no non-cero imagenes homomorficas definidas sobre $\overline{\mathbb{F}_{q=p^n}}$, entonces, existe L/k finita cumpliendo $|\Gamma_2(X, L)| = \infty$ siI X es bielíptica o hiperelíptica.

X_K una curva no-singular plana de grado d, i.e. $X_K \times \overline{K}$ isomorfa a $F(X,Y,Z)=0$ con $F \in \overline{K}[X,Y,Z]$ monico de grado d.

$$g_X = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Suponemos $d \geq 4$

X_K tiene un modelo plano no-singular sobre K si $(d,3)=1$.

Fenomeno asimptótico

Equaciones de Fermat $X_K : X^p + Y^p = Z^p$ con $p \geq 5$ primo, donde el último teorema de Fermat asimptótica afirma (con resultados de Siksek, Freitas,...):

- $\exists B_K$ cumpliendo $\forall p > B_K$ las solucions de la equacion de Fermat sobre K satisface $xyz = 0$.

En esta charla, estamos interesados en finitud o no de puntos cuadráticos

gonalidad de $X_K \otimes_K \overline{K}$ es $d-1$

Corolario

X_K curva no-singular plana de grado $d \geq 6$, entonces no es bielíptica o hiperelíptica, en particular

$$|\Gamma_2(X,L)| < \infty$$

L/K ext. finita de campos.

Corolario (Fenómeno Asimptótico,Badr-B.)

X_K curva no-singular plana de grado $d \geq 5$. Entonces, el número de extensiones cuadrads $K \subset K' \subset \overline{K}$ donde $X(K') \neq X(K)$ son un número finito. En particular, $F_d : X^d + Y^d - Z^d = 0$ con $d \geq 5$ satisface que $F_d(\mathbb{Q}) = F_d(\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ para todo inter libre de cuadrados D a excepción de un conjunto finito de valores D.

$\mathcal{M}_g$ espacio de moduli, que representa $\overline{K}$-clases de isomorfismo de curvas no-singulares planas de género g

$\widetilde{\mathcal{M}_g^{Pl}}(G) \subset \mathcal{M}_g$ con G grupo finito no-trivial donde sus $\overline{K}$-puntos son $\overline{K}$-isomorfos a curvas planas no-singulares X con $Aut_{\overline{K}}(X) \cong G$.

Lercier-Ritzenthaler-Rovetta-Sijsling introdujeron nociones de familias completa, finita y representativa para los stratas anteriores.

Una família $\mathcal{C}$ es completa sobre K para $\widetilde{\mathcal{M}_g^{Pl}}(G)$ si para toda extension L/K y cualquier L-punto $[C]/L$ en el estrato, existe un modelo plano no-singular para C definido sobre L en la familia $\mathcal{C}$. Decimos geometricamente completo si $\mathcal{C} \otimes_K \overline{K}$ es completo.

Teorema (Badr-B.)

Sea C una cuártica $(K,\overline{K})$-plana y no-singular. Entonces, C es bielíptica sil $C\otimes_K\overline{K}\in\widetilde{\mathcal{M}_3^{Pl}}(G)(\overline{K})$ con $G=\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/6,S_3$,$D_4$,$GAP(16,13)$,$S_4$,$GAL(48,33)$,$GAP(96,64)$ o $PSL_2(\mathbb{F}_7)$.

Table: Families geométricamente completas y bielípticas

$\mathrm{Aut}(C_{\overline{k}})$	Families	Restricciones
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$Z^4+Z^2L_{2,Z}(X,Y)+L_{4,Z}(X,Y)$	$L_{2,Z}(X,Y)\neq 0,\ not\ below$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$Z^4+Z^2(bY^2+cX^2)+(X^4+Y^4+aX^2Y^2)$	$a\neq\pm b\neq c\neq\pm a$
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	$Z^4+aZ^2Y^2+(X^3Y+Y^4)$	$a\neq 0$
$\mathbf{S_3}$	$(X^3+Y^3)Z+X^2Y^2+aXYZ^2+bZ^4$	$a\neq b,\ ab\neq 0$
D_4	$Z^4+bXYZ^2+(X^4+Y^4+aX^2Y^2)$	$b\neq 0,\pm\frac{2a}{\sqrt{1-a}}$
$\mathrm{GAP}(16,13)$	$Z^4+(X^4+Y^4+aX^2Y^2)$	$\pm a\neq 0,2,6,2\sqrt{-3}$
S_4	$Z^4+aZ^2(Y^2+X^2)+(X^4+Y^4+aX^2Y^2)$	$a\neq 0,\ \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$
$\mathrm{GAP}(48,33)$	$Z^4+\left(X^4+Y^4+(4\zeta 3+2)X^2Y^2\right)$	$-$
$\mathrm{GAP}(96,64)$	$Z^4+(X^4+Y^4)$	$-$
$\mathbf{PSL_2}(\mathbb{F}_7)$	$X^3Y+Y^3Z+Z^3X$	$-$

Conjetura

Fijamos un estrato del tipo $\widetilde{\mathcal{M}_3^{\mathrm{Pl}}}(G)$*, donde todos sus* $\overline{\mathbb{Q}}$*-puntos son bielipticos. Entonces, en* $\widetilde{\mathcal{M}_3^{\mathrm{Pl}}}(G)(\mathbb{Q})$ *hay un conjunto infinito* $\mathcal{E}$ *(resp.* $\mathcal{D}$*) de clases de* $\mathbb{Q}$*-isomorfismo de curvas cuadricas no-singulars sobre* $\mathbb{Q}$*, cumpliendo que* $\Gamma_2(C, \mathbb{Q})$ *es un conjunto finito (resp. infinito).*

Usando la teoria de twist en curvas planas no singulares obtenemos:

Proposición (Badr-B.)

La conjectura para $G = \mathbb{Z}/6$ *y* $G = GAP(15, 13)$ *es cierta.*

Ideas atacar la conjetura, caso $\mathbb{Z}/6$

Familia representativa

$$\mathcal{C}_a : \, aZ^4 + Y^2(Y^2 + aZ^2) + X^3Y = 0,$$

donde $a \neq 0, 4$, es una familia representativa sobre k para $\widetilde{\mathcal{M}_3^{\mathrm{Pl}}}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.
i.e., cualquier cuártica plana no-singular C sobre k con grupo de automorfismo isomorfo a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ tiene un modelo plano no-singular en $\mathcal{C}_a$ para un único $a \in k$, i.e., existe una extensión finita L/k en $\overline{k}$ donde $C \otimes_k L$ es L-isomorfo a una única ecuación $aZ^4 + Y^2(Y^2 + aZ^2) + X^3Y = 0$ para cierto $a \in k$. En particular, $\Gamma_2(C, L) = \Gamma_2(aZ^4 + Y^2(Y^2 + aZ^2) + X^3Y = 0, L)$.

Una familia con cociente elíptico de rango positivo

Considerese $aZ^4 + Y^2(Y^2 + aZ^2) + X^3Y = 0$ con $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 4\}$.
Entonces $C_a/\langle diag(\tilde{1}, 1, -1)\rangle$ es una curva elíptica de rango positivo sobre $\mathbb{Q}$. En particular, $\mathcal{C}_a$ con $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 4\}$ es una familia infinita de curvas bielípticas planas no singulares sobre $\mathbb{Q}$ con grupo automorfismo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, y $\Gamma_2(\mathcal{C}_a, \mathbb{Q})$ es un conjunto infinito. $E/\mathbb{Q} : z^2 = x^3 - a^3(1 - a/4)$ tiene el punto de no-torsion $P_a := (x, z) = (a, a^2/2)$.

Una familia con cociente elíptico de rango cero

Usando PhD Elisa Lorenzo, sobre twists de cuádricas, consideramos la familia de todos los twists sobre $\mathbb{Q}$ de C_a:
la familia $A, n, m \in k^*$:

$$\mathcal{C}_{A,n,m} : Am^2Z^4 + mY^2Z^2 + nX^3Y + Y^4 = 0,$$

donde $(A, n, m) \in k^* \times k^*/k^{*^3} \times k^*/k^{*^2}$ lo satisface.
$\mathcal{C}_{A(t),n(t),m} : A(t)m^2Z^4 + mY^2Z^2 + n(t)X^3Y + Y^4 = 0$ donde
$A(t) := (108t^2 + 1)/4$ y $n(t) := 4/t(108t^2 + 1)$, para $t = a/b \in \mathbb{Q}^*$ con a, b impares y coprimos.
$\mathbb{Q}$-Isomorfo a:$z^2 = x^3 - 27$, tiene rango 0 sobre $\mathbb{Q}$.
$(A(t), n(t), m)$ y $(A(t'), n(t'), m')$ con $A(t) \neq A(t')$ no son $\overline{\mathbb{Q}}$-isomorfas.

Curvas modulares Classicas

T

.

- Son curvas algebraicas que corresponden a cierto problema de moduli para curvas elípticas con información adicional.
- Sobre $\mathbb{C}$, $X_{\Gamma,\mathbb{C}}$ corresponde a una superfície de Riemann definida completando en las cuspides a

$$\mathbb{H}/\Gamma$$

Γ es un subgrupo modular de $SL_2(\mathbb{R})$ commensurable con $SL_2(\mathbb{Z})$.

Uno de los mas conocidos son $\Gamma(N) \leq \Gamma_1(N) \leq \Gamma_\Delta(N) \leq \Gamma_0(N) \leq SL_2(\mathbb{Z})$ correspondiendo a mapeos naturales

$$X(N)_\mathbb{C} \to X_1(N)_\mathbb{C} \to X_\Delta(N)_\mathbb{C} \to X_0(N)_\mathbb{C}$$

y cada una de estas curvas modulares son curvas algebraicas definidas sobre $\mathbb{Q}$ con buena reducción cuando $p \nmid N$.

Si X_Γ es bielíptica o hiperelíptica, existe una involución en $Aut(X_\Gamma)$.
Siempre $Norm_{SL_2(\mathbb{R})}\Gamma/\Gamma \leq Aut(X_\Gamma)$
Para $X_0(N)$, con $N \neq 37, 63, 198$:

$$Norm_{SL_2(\mathbb{R})}\Gamma_0(N)/\Gamma_0(N) = Aut(X_0(N)),$$

donde

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) | c \equiv 0 (mod\ N) \right\}$$

y para cada $d|N$ con $(N, N/d) = 1$ tenemos $w_d = \frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} da & b \\ Nc & dk \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ involuciones de Atkin-Lehner en $Aut(X_0(N))$ y

$$\langle \{w_d\}_{d||N} \rangle \leq Aut(X_0(N)).$$

El caso bielíptico modular

Para curvas clásicas modulares, fueron determinadas la bielipticidad o no a partir del nivel N en las famílias:

- las curvas $X_0(N)$ (B., 1999).
- $X_1(N)$ (Jeon-Kim 2004)
- las curvas $X(N)$ (Jeon-Kim, B.-Kontogeorgis-Xarles 2013)
- las curvas intermedias $X_\Delta(N)$ (Jeon-Kim-Schweizer 2017).
- las curvas $X_0^+(N) = X_0(N)/\langle w_N \rangle$ (Jeon 2018).

En un conjunto de trabajos, estudiamos $X_0^{W_N}(N) = X_0(N)/W_N$, donde W_N un subgrupo no trivial de $B(N)$ el grupo formado por todas las involuciones de Atkin-Lehner en $X_0(N)$, con $W_N \neq \langle w_N \rangle$.

Las curvas hiperelípticas $X_0^{W_N}(N)$ fueron determinados en diferentes trabajos por Hasegawa y Hashimoto ($\sim$ 1997), y Hasegawa ($\sim$ 1999).

Después de encontrar las curvas bielípticas (usualmente con poco trabajo), uno puede determinar los N cumpliendo que $|\Gamma_2(X_0^{W_N}(N), \mathbb{Q})| = \infty$.

Notación

- $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.
- $B(N)$ grupo inv. Atkin-Lehner, $n =$ n° primos $p \mid N$, $|B(N)| = 2^n$.
- $X_0^*(N) = X_0(N)/B(N)$, $X^{W_N}(N) = X_0(N)/W_N$ con $W_N \leq B(N)$.
- g_N, g_N^* y $g_N^{W_N}$ género de $X_0(N)$, $X_0^*(N)$ y $X_0^{W_N}(N)$ respectivamente.
- $J_0(N) = \mathrm{Jac}(X_0(N))$, $J_0^*(N) = \mathrm{Jac}(X_0^*(N))$ y $J_0^{W_N}(N) = \mathrm{Jac}(X_0^{W_N}(N))$.
- New_N conjunto de formas nuevas normalidas en $S_2(\Gamma_0(N))^{\mathrm{new}}$.
- $\mathrm{New}_N^* = \mathrm{New}_N^{B(N)}$ subconjunto de New_N invariante por $B(N)$.
- Para $f \in \mathrm{New}_N$,
  - A_f es la v.a. asociada por Shimura a f,
  - $a_m(f)$ es el coeficiente m-ésimo de expansion de Fourier f en q,
  - K_f el cuerpo de números totalmente real $\mathbb{Q}(\{a_m(f)\}_m)$.
- ψ la función de Dedekind.
- $\sigma_0(M)$ el número de divisores positivos de M.
- A y B v.a. sobre K, $A \overset{K}{\sim} B$ denota isogonea sobre K.

Algunos resultados sobre $X_0(N)$

Sabemos

- el mapeo $S_2(\Gamma_0(N)) \cap K[[q]] \to \Omega^1_{X_0(N)/K}$, $h \mapsto h(q)dq/q$ es un $\simeq$.

- $J_0(N) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} \prod_{M|N} \prod_{f\in \mathrm{New}_M \backslash G_{\mathbb{Q}}} A_f^{\sigma_0(N/M)}$.

- el conjunto $\cup_{M|N} \cup_{f\in\mathrm{New}_M} \{f(q^d) \colon d|N/M\}$ es una base para $S_2(\Gamma_0(N))$. En particular,

$$g_N = \sum_{M|N} |\,\mathrm{New}_M\,| \sigma_0(N/M)\,.$$

- para un primo $p \nmid N$ y $f \in \mathrm{New}_M$, el polinomio característico del Frob_p actuando en el módulo de Tate de A_f es (Eichler-Shimura)

$$\prod_{\sigma\colon K_f \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}} x^2 - a_p(f^\sigma)x + p\,.$$

- for $p \nmid N$, $|X_0(N)(\mathbb{F}_{p^x})| = p^n + 1 - \sum_{i=1}^{2g_n} \alpha_i^n$, donde

$$\prod_{i=1}^{2g_N}(x-\alpha_i) = \prod_{M|N} \prod_{f\in\mathrm{New}_M} (x^2 - a_p(f)x + p)^{\sigma_0(N/M)}\,.$$

$X_0^*(N)$, con N libre de cuadrados

Si N libre de cuadrados:

- $J_0^*(N) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} \prod_{M|N} \prod_{f \in \mathrm{New}_M^* \backslash G_{\mathbb{Q}}} A_f$.
- $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(J_0^*(N)) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(J_0^*(N)) \otimes \mathbb{Q} \simeq \prod_j K_j$, con K_j cuerpo de números totalmente real.
- $\mathrm{Aut}(X_0^*(N)) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(X_0^*(N)) \hookrightarrow \prod_j K_j \Rightarrow \mathrm{Aut}(X_0^*(N)) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$.

Sea $E/\mathbb{Q}$ c.e. y $f_E \in \mathrm{New}_M$ la forma modular asociada a E. Decimos que el par (N, E) es bielíptico si E es $\mathbb{Q}$-isógeno a un cociente bielíptico de $X_0^*(N)$. Entonces,

cond$(E) = M|N$, $f_E \in \mathrm{New}_M^*$ y $\mathbb{Q} \sum_{d|N/M} d\, f_E(q^d) dq/q =$pullback de $\Omega^1_{E/\mathbb{Q}}$.

Lemma

Supongamos que (N, E) es bielíptico. Para un primo $p \nmid N$, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\text{(a)}\ \frac{\psi(N)}{2^n} \leq 12 \frac{2|E(\mathbb{F}_{p^2})| - 1}{p-1}, \quad \text{(b)}\ g_N^* \leq 2 \frac{|E(\mathbb{F}_{p^2})|}{p-1}, \quad \text{(c)}\ g_N \leq 2^{n+1} \frac{|E(\mathbb{F}_{p^2})|}{p-1}.$$

Observese: $|E(\mathbb{F}_{p^2})| = (p+1)^2 - a_p(f_E)^2 \leq (p+1)^2$.

Cribas, N libre de cuadrados

Gracias al lema obtenemos un conjunto finito $\mathcal{C}$ de posibles candidatos de N (argumento de Ogg).

- Segunda criba (tablas de Cremona): Substituir $\mathcal{C}$ por el conjunto $\mathcal{P}$ de pares (N, E), donde $N \in \mathcal{C}$ y $E/\mathbb{Q}$ es una c.e. con $f_E \in \mathrm{New}_M^*$, for $M|N$. Aplicamos el lema con $|E(\mathbb{F}_{p^2})|$.
- Tercera criba (tablas de Cremona): Si $N = M$, borrar los pares en $\mathcal{P}$ donde la parametrización fuerte de Weil para E no divida 2^{n+1}.
- Cuarta criba: Para $p \nmid N$, ponemos

$$P_p(n) := \mathrm{mod}\,[(\sum_{d|n} \mu(n/d)|X_0^*(N)(\mathbb{F}_{p^n})|)/n, 2]$$

  donde $\mathrm{mod}\,[r, 2] \in \{0, 1\}$ (denota modulo 2) y μ la función Moebius.
  Si $X_0^*(N)$ tiene una involución $u/\mathbb{Q}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{k} (2n+1) P_p(2n+1) \leq 2g_N^* + 2\,, \ \forall k \geq 0\,.$$

  Borramos los pares (N, E) en que falla la desigualdad.
- Quinta criba: borrar los pares donde

$$|X_0^*(N)((\mathbb{F}_{p^n})| > 2|E((\mathbb{F}_{p^n})|\,, \text{para algún primo } p \nmid N\,.$$

Caso hiperelíptico, N libre de cuadrados

Hasegawa, Hashimoto

$X_0^*(N)$ hiperelíptica y N libre de cuadrados $\Leftrightarrow$ $g_N^* = 2$.

Proposición

Sea N libre de cuadrados y $g_N^* = 2$. La curva $X_0^*(N)$ es bielíptica, sil, $J_0^*(N) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} E_1 \times E_2$ donde E_1 E_2 son cocientes bielípticos. En dicha situación, si $\omega_i \in \Omega^1_{X_0^*(N)/\mathbb{Q}}$, $1 \leq i \leq 2$, es el pulback de las diferenciales regulares de E_i, las funciones $x = \omega_1/\omega_2$ y $y = dx/\omega_2$ satisfacen la relacion $y^2 = P(x)$ con $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ de grado 6. El grupo de automorfisme corresponde a $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$.

Proposición

Para N libre de cuadrados y $g_N^* = 2$. $X_0^*(N)$ es bielíptica sil, $N \in \{106, 122, 129, 158, 166, 215, 390\}$. En estos casos, $\mathrm{Aut}(X_0^*(N))$ es el grupo de Klein.

Pares no-hiperelípticos, N libre de cuadrados

Después de las cribas, los pares que faltan trabajar (N, E), ordenados por género són, (siempre $g_N^* > 2$):

N	g_N^*	E
178	3	$89a$
183	3	$61a$
185	3	$37a$
246	3	$82a, 123b$
249	3	$83a, 249b$
258	3	$43a, 129a$
282	3	$141d$
290	3	$145a$
303	3	$101a$
310	3	$155c$
318	3	$53a, 106b$
430	3	$43a, 215a$
455	3	$65a$
462	3	$77a, 154a$
510	3	$102a$

N	g_N^*	E
202	4	$101a$
262	4	$131a$
354	4	$118a$
366	4	$61a$, $122a$
370	4	$185c$, $370a$
399	4	$57a$
426	4	$142b$
546	4	$91a$
570	4	$57a$, $190b$, $285b$

N	g_N^*	E
237	5	$79a$
402	5	$201c$
438	5	$219a$
645	5	$129a$ $215a$
714	5	$238b$
798	5	$399a$
910	5	$91a$, $455a$
690	6	$138a$
858	6	$143a$, $286c$
870	7	$145a$, $290a$

Un teorema de Petri

Fijemos una inmersioń de K en $\mathbb{C}$. Denotemos por $K_h[x_1, \cdots, x_g]$ el subespacio de polinomios homogeneos de $K[x_1, \cdots, x_g]$.

Teorema de Petri (i)

Sea X/K una curva no-singular y no-hipereliptica con $g_X > 2$ y $\omega_1, \cdots, \omega_g$ una base de $\Omega^1_{X/K}$. La curva X es obtenida como los zeros comunes de los polinomios en el K-e.v.

$$\mathcal{L} = \{Q \in K_h[x_1, \cdots, x_g] \colon Q(\omega_1, \cdots, \omega_g) = 0\}.$$

Escribid $h_i = \omega_i/\omega_g \in K(X)$, $1 \leq i \leq g-1$.

En particular $K(X) = K(h_1, \cdots, h_{g-1})$ y h_i satisface $Q(h_1, \cdots, h_{g-1}, 1) = 0$, $Q \in \mathcal{L}$.

Teorema de Petri

Para $i > 1$, denotad $\mathcal{L}_i = \{Q \in \mathcal{L} \colon \deg Q = i\}$.

Obsérvese $\dim \mathcal{L}_i \leq \dim \mathcal{L}_{i+1}$, ya que $x_j \mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}_{i+1} \, \forall j \leq g$.

Teorema de Petri

Sea X/K curva no-hipereliptica con $g_X > 2$ y $\omega_1, \cdots, \omega_g$ una base de $\Omega^1_{X/K}$. X corresponde a los zeros comunes de los polinomios en el K-espacio vectorial

$$\mathcal{L} = \{Q \in K_h[x_1, \cdots, x_g] \colon Q(\omega_1, \cdots, \omega_g) = 0\}.$$

Mas concretamente,

- Si $g_X = 3$, $\dim \mathcal{L}_2 = \dim \mathcal{L}_3 = 0$, $\mathcal{L}_4 = K \cdot Q(x_1, x_2, x_3) \neq \{0\}$ y, para $i \geq 4$, $\mathcal{L}_i$ són multiples de Q. Los ceros de $\mathcal{L}$ son los que corresponden a Q (cuártica plana no-singular).
- Si $g_X > 3$, $\dim \mathcal{L}_2 = (g-3)(g-2)/2$ y los ceros de $\mathcal{L}$ son los ceros en $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$. Si X no es trigonal o no es una quintica no-singular, los ceros comunes para todos los elementos de $\mathcal{L}$ son los zeros de $\mathcal{L}_2$.

Si $g_X = 4$ y X no hipereliptica, su gonalidad es 3. En dicha situación $\dim \mathcal{L}_2 = 1$ y $\dim \mathcal{L}_3 = 5$. Por tant, un modelo para X es dado por un polinomio $Q_2 \in \mathcal{L}_2$ ($Q_2 \neq 0$) y un polinomio $Q_3 \in \mathcal{L}_3$ que no es múltiple de Q_2.

Involuciones no-hiperelipticas

Sea $u \in Aut_K(X)$ (X no hipereliptica con $g_X > 2$), entonces

$$Q(u^*(\omega_1), \cdots, u^*(\omega_g)) = 0\,, \quad \forall Q \in \mathcal{L}\,.$$

Si u es una involución y $\{\omega_i\}$ es una base de vectores propios, i.e. $u^*(\omega_i) = \varepsilon_i \omega_i$ con $\varepsilon_i = \pm 1$, entonces

$$Q(\varepsilon_1 x_1, \cdots, \varepsilon_g x_g) \in \mathcal{L}\,, \quad \forall Q \in \mathcal{L}\,. \tag{1}$$

Conversely, si la condición (1) se satisface, entonces el mapeo

$$u\colon \omega_i \mapsto \varepsilon_i \omega_i \quad \text{or} \quad v\colon \omega_i \mapsto -\varepsilon_i \omega_i,\ 1 \le i \le g, \text{ es una involución de } X\,.$$

Para $X = X_0^*(N)$, $J_0^*(N) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} \prod A_{f_i}$. Porqué u actua en cada A_{f_i} por $\pm$ Id, una base de $\Omega^1_{X_0^*(N)/\mathbb{Q}}$ como union de base de $\Omega^1_{A_{f_i}/\mathbb{Q}}$ son eigenvectors para u.

Proposición

Supongamos $X_0^*(N)$ no hiperelíptica. Tomemos $\omega_1, \cdots, \omega_{g_N^*}$ una base de $\Omega^1_{X_0^*(N)/\mathbb{Q}}$ como antes, cumpliendo que ω_1 es la diferencial asociada a la c.e. E. El par (N, E) es bielíptico sil,

$$Q(-x_1, x_2, \cdots, x_{g_N^*-1}, x_{g_N^*}) \in \mathcal{L}_i\, \forall Q \in \mathcal{L}_i\, \forall i \ge 2\,. \tag{2}$$

Involuciones bielípticas

La relación (2) es caracterizada por una $X/\mathbb{Q}$ como sigue:

- Si $g_X = 3$ y $\mathcal{L}_4 = \langle Q_4(x_1, x_2, x_3) \rangle$:

$$Q(-x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{L}, \forall Q \in \mathcal{L} \Leftrightarrow Q_4(x_1, x_2, x_3) = Q_4(-x_1, x_2, x_3)$$

- Si $g_X > 3$

$$\begin{gathered} Q(-x_1, \cdots, x_g) \in \mathcal{L}_2, \forall Q \in \mathcal{L}_2 \\ \Updownarrow \\ Q(x_1, \cdots, x_g) = Q(-x_1, \cdots, x_g), \forall Q \in \mathcal{L}_2 . \end{gathered}$$

  y

$$\begin{gathered} Q(-x_1, \cdots, x_g) \in \mathcal{L}_3, \forall Q \in \mathcal{L}_3 \\ \Updownarrow \\ Q(x_1, \cdots, x_g) - Q(-x_1, \cdots, x_g) \in x_1 \cdot \mathcal{L}_2, \forall Q \in \mathcal{L}_3 . \end{gathered}$$

Curvas bielliptic usando el teorema de Petri

Generalizemos el criterio anterior para determinar cuando una curva no-hiperelíptica lisa X/K es bielíptica sobre K o no.

Proposición

Sea $\mathrm{Jac}(X) \stackrel{K}{\sim} E^m \times A$, con E una curva elíptica y A v.a. cumpliendo que no tiene E como cociente definido sobre K. Sea $I_{g-m} \in M_{g-m}(K)$ la matriz identidaad y $\{\omega_i\}$ una base de $\Omega^1_{X/K}$ s.t. $\omega_1, \cdots, \omega_m$ y $\omega_{m+1}, \cdots, \omega_g$ son base de los pullbacks de $\Omega^1_{E^m/K}$ y $\Omega^1_{A/K}$ resp. Entonces, el par (X, E) es bielíptico sobre K sil, existe una matriz $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}_m(K)$ que satisface

$$Q((-x_1, x_2, \cdots, x_g) \cdot \mathcal{B}) \in \mathcal{L}'_i \ \forall Q \in \mathcal{L}_i \text{ y } \forall i \geq 2\,, \tag{3}$$

donde $\mathcal{B}$ es la matriz $\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A} & 0 \\ \hline 0 & I_{g-m} \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_g(K)$ y $\mathcal{L}'_i = \{Q((x_1, x_2, \cdots, x_g) \cdot \mathcal{B}) \colon Q \in \mathcal{L}_i\}$.

Nota: $(\omega'_1, \cdots, \omega'_m) = \mathcal{A}^{-1}(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ es una base por eigenvectores de u en $\Omega^1_{E^m/K}$, con $u(\omega'_1) = \omega'_1$ and $u(\omega'_j) = -\omega'_j$ para $j \neq 1$.

Curvas bielípticas para $X_0^*(N)$, y puntos cuadráticos, N libre de cuadrados

Teorema

Sea $N > 1$ un natural libre de cuadrados. La curva modular $X_0^*(N)$ es bielíptica ($g_N^* \geq 2$) sil, N aparece en la tabla siguiente

g_N^*	N
2	$106, 122, 129, 158, 166, 215, 390$
3	$178, 183, 246, 249, 258, 290, 303, 318, 430, 455, 510$
4	370

Para dichos valores de N, $\mathrm{Aut}(X_0^*(N))$ tiene orden 2 si $g_N^* > 2$ y es el grup de Klein cuando $g_N^* = 2$.

A más, $|\Gamma_2(X_0^*(N), \mathbb{Q})| = \infty$ sil, N es en la anterior lista o en

$$\{67, 73, 85, 93, 103, 106, 107, 115, 122, 129, 133, 134, 146, 154, 158, 161, 165, 166, 167, 170, 177, 178, 183, 186, 191, 205, 206, 209, 213, 215, 221, 230, 246, 249, 255, 258, 266, 285, 286, 287, 290, 299, 303, 318, 330, 357, 370, 390, 430, 455, 510\}.$$

N no libre de cuadrados. Pasos preliminares

Lema

Sea p un primo. Si para un entero $k \geq 2$, $X_0^*(p^k \cdot M)$ es bielíptica, entonces $X_0^*(p^{k-2} \cdot M)$ es hiperelíptica, bielíptica o tiene género ≤ 1.

Corolario

Sea $N > 1$ s.t. $g_N^* \geq 2$. Sea M el mayor entero libre de cuadrados s.t. $M|N$ y $val_p(N)$ es impar por cada primo $p|M$. Si $X_0^*(N)$ es bieliptico, entonces $X_0^*(M)$ es bieliptico o $g_M^* \leq 2$.

Proposición [Jeon]

Let be $N = p^k$ with p prime, $k > 1$ and $g_N^* \geq 2$. Then, $X_0^*(N)$ is bielliptic iff $N = 121 = 11^2$, or $N = 128 = 2^7$ ($g_{121}^* = 2$ and $g_{128}^* = 3$).

Lemma

Sea (N, E) bielíptico sobre $\mathbb{Q}$. Para un primo $p \nmid N$, se satisfacen las desigualdades

$$\text{(a) } \frac{\psi(N)}{2^n} \leq 12\frac{2|E(\mathbb{F}_{p^2})|-1}{p-1}, \text{ (b) } g_N^* \leq 2\frac{|E(\mathbb{F}_{p^2})|}{p-1}, \text{ (c) } g_N \leq 2^{n+1}\frac{|E(\mathbb{F}_{p^2})|}{p-1}.$$

N no libre de cuadrados, $J_0^*(N)/\mathbb{Q}$ and $\Omega^1(X_0^*(N))$

- Una de las principales diferencias con N libre de cuadrados es en la descomposición de $J_0^*(N)$ sobre $\mathbb{Q}$.

Para N general, $M|N$ y $f \in \mathrm{New}_M$, escribamos $H_f = \langle f(q^d) \colon d|N/N \rangle$.

- N libre de cuadrados y $H_f^{B(N)} \neq \{0\} \Leftrightarrow f \in \mathrm{New}_M^*$. En esta situación, $\dim H_f = 1$ y

$$H_f = \langle \sum_{d|N/M} w_d(f(q)) \rangle = \langle \sum_{d|N/M} df(q^d) \rangle \,.$$

- Si N no libre cuadrados y $H_f^{B(N)} \neq \{0\}$, puede ocurrir $f \notin \mathrm{New}_M^*$ or $n_f := \dim H_f > 1$.

Por tanto en la descomposición de $J_0^*(N)$,

$$J_0^*(N) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} \prod_{M|N} \prod_{f \in \mathrm{New}_M \,/G_{\mathbb{Q}}} A_f^{n_f} \,,$$

puede aparecer $n_f > 1$. Necesitamos determinar una base de H_f ($\forall f \in \mathrm{New}_M$ and $\forall M|N$) para determinar una base para $\Omega^1(X_0^*(N))$ (y usar el teorema de Petri), estas ideas se encuentra en "Hecke operators" Atkin-Lehner paper in Annals.

N no libre cuadrados, $J_0^*(N)/\mathbb{Q}$ and $\Omega^1(X_0^*(N))$

For an integer $d>0$, B_d denote the operator

$$B_d\colon S_2(\Gamma_0(M) \to S_2(\Gamma_0(M\cdot d)\,, \quad f\mapsto f(q^d)\,.$$

Proposición

Para un primo $p\nmid M$ y $i\geq 0$, sea $f\in S_2(\Gamma_0(p^i\cdot M))^{B(M)}$ s. t. $w_{p^i}(f)=\varepsilon\cdot f$ ($\varepsilon=1$ si $i=0$). Para $k>i$, sea $\mathcal{S}_f$ el e.v. de $S_2(\Gamma_0(p^k\cdot M))$ generado por los $k-i+1$ l. i. $\{f,B_p(f),\cdots,B_p^{k-i}(f)\}$. Entonces,

(i) Las formas modulares siguientes son una base de $\mathcal{S}_f$:

$$g_j=(1+pB_p)^{k-i-j}(1-pB_p)^j f\,,\quad 0\leq j\leq k-i\,.$$

y eigenvector para w_{p^k}: $w_{p^k}(g_j)=(-1)^j\varepsilon g_j$.

(ii) La dimensión s_f del e.v. $\mathcal{S}_f^{B(p^k\cdot M)}$ es

$$s_f=\begin{cases}\dfrac{k-i+1}{2} & \text{si } k-i \text{ es impar,}\\ \dfrac{k-i+1+\varepsilon}{2} & \text{si } k-i \text{ es par.}\end{cases}$$

Curvas Bielipticas, pueden no ser sobre $\mathbb{Q}$.

- La otra gran diferencia cuando N no libre de cuadrados es $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(J_0^*(N)) \neq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(J_0^*(N))$.

Lema [Silverman-Harris]

Sea X_K con $g_X \geq 6$. Si X es bielíptica, entonces existe una única involución bielíptica y esta definida sobre K.

Lema [BGGP=Baker,González-Jiménez,González,Poonen]

Sea A una v.a. definida sobe $\mathbb{Q}$ s.t. $A \overset{\mathbb{Q}}{\sim} \prod_{i=1}^{m} A_{f_i}^{n_i}$ por algun $f_i \in \mathrm{New}_{N_i}$, con $A_{f_i} \overset{\mathbb{Q}}{\not\sim} A_{f_j}$ si $i \neq j$. Entonces $\mathrm{End}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ sil, para todo caracter cuadrático de Dirichlet χ, $f_i \otimes \chi \neq f_j^{\sigma}$ para todo $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ y para todo i y j.

curvas bielipticas, pueden no ser sobre $\mathbb{Q}$

Lema [Pyle]

Sea $f \in \mathrm{New}_M$ sin CM y s.t. $\dim A_f > 1$. Si existe un primo p s.t. $a_p(f)^2 \notin \mathbb{Z}$, entonces A_f no tiene un cociente eliptico sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Lema [BGGP]

Sea $f \in \mathrm{New}_M$ y χ_D el caracter cuadrático asociado a $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Existe una isogenia entre A_f y $A_{f \otimes \chi_D}$ definida sobre K.

N no libre de cuadrados. Cribas

• Hay un mapeo $X_0^*(N=ML)\to X_0^*(M)$ con M libre de cuadrados (y L con ciertas propiedades) nos reducimos a ciertos valores de N.

• Cuando un par (N,E) es estudiado sobre $\mathbb{Q}$ (es el caso general si $g_N^*\geq 6$), aplicamos el lema de desigualdades contando puntos sobre cuerpos finitos y cribas similares al caso N libre de cuadrados, a excepción

que los pares (N,E) ahora son $f_E\in \mathrm{New}_M$ y

$$n_{f_E}=\dim\,\langle f_E(q^d)\colon d|N/M\rangle^{B(N)}\geq 1\,.$$

Determinamos la lista de N con $2\leq g_N^*\leq 5$.

• Para $g_N^*\leq 5$, solo aparecen posibles pares (N,E) con $E/\mathbb{Q}$ pero con involución definida sobre una extension cuadrática K' (asociada al carácter de Dirichlet χ). En particular,

• Cuando $8|N$ o $9||N$ there hay involuciones provinentes del normalizador de $\Gamma_0^*(N)$ en $PSL_2(\mathbb{R})$.

Pares a estudiar, después de cribas con $g_N^* \leq 5$

g_N^*	N
2	$88, 104, 112, 116, 135, 153, 168, 180, 184, 198, 204, 276, 284, 380$
3	$136, 144, 152, 162, 164, 171, 189, 196, 207, 234, 236, 240, 245, 248, 252, 270, 294, 312, 315, 348, 420, 476.$
4	$148, 160, 172, 176, 200, 224, 225, 228, 242, 260, 264, 275, 280, 300, 306, 308, 342, 350.$
5	$192, 208, 212, 216, 316, 364, 376, 378, 396, 414, 440, 444, 495, 572, 630.$

Ejemplo $g_N^* \leq 5$: $X_0^*(160)$, $g_{160}^* = 4$

$X_0^*(160)$ no es hipereliptica. La decomposición de $J_0^*(160)$ es
$J_0^*(160) \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_{f_1}^2 \prod_{i=3}^4 A_{f_i}$ con $A_{f_1} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} E20a\,,\ A_{f_3} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} E80b\,,\ A_{f_4} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} E160a\,,$

$f_1 \in \mathrm{New}_{20}^{w_5}$, $f_3 \in \mathrm{New}_{80}^{w_5}$, $f_4 \in \mathrm{New}_{160}^*$ y $f_3 = f_1 \otimes \chi_{-1}$.

Porqué
$(1-2B_2)(1+2B_2)^2 = 1 + 2B_2 - 4B_2^2 - 8B_2^3\,,\ (1-2B_2)^3 = 1 - 6B_2 + 12B_2^2 - 8B_2^3,$

Una base de $\Omega^1_{X_0^*(160)/\mathbb{Q}}$: $\omega_i = h_i(q)\,dq/q$, $1 \leq i \leq 4$ con

$$\begin{aligned}
h_1(q) &= \quad f_1(q) + 2f_1(q^2) - 4f_1(q^4) - 8f_1(q^8)\,,\\
h_2(q) &= f_1(q) - 6f_1(q^2) + 12f_1(q^4) - 8f_1(q^8)\,,\\
h_3(q) &= \qquad\qquad\qquad\qquad f_3 - 2f_3(q^2)\,,\\
h_4(q) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f_4(q)\,.
\end{aligned}$$

Recordad $\dim \mathcal{L}_2 = 1$, $\dim \mathcal{L}_3 = 5$.

Calculando $Q_i(x,y,z,t) \in \mathcal{L}_i$ con $Q_i(h_1,h_2,h_3,h_4) = 0$, $i = 2,3$:

$$Q_2 = -48t^2 + 8tx + 3x^2 - 8ty + 6xy - y^2 + 36xz + 12yz - 8z^2\,.$$

$Q_3 = 20t^2x - 12tx^2 - 3x^3 - 20t^2y - 4ty^2 + 3xy^2 - 9x^2z + 6xyz + 3y^2z + 16tz^2 + 6xz^2 - 6yz^2$

$X_0^*(160)$ no es bielíptica sobre $\mathbb{Q}$

Los pares $(160, E80b)$ y $(160, E160a)$ necesitan un estudio para saber si pueden ser bielipticos o no sobre $\mathbb{Q}$.

No lo son porqué Q_2 no es par en z, ni tampoco en t.

El par $(160, E20a)$ podria ser bieliptico sobre $\mathbb{Q}$ sil existe $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ s.t. los polinomios

$$R_2 := Q_2(a_1x + a_2y, b_1x + b_2y, z, t)\,,\ \ R_3 := Q_3(a_1x + a_2y, b_1x + b_2y, z, t)$$

satisfacen

$$\boxed{R_2 \text{ es par en } x} \text{ y } \boxed{R_3(x, y, z, t) - R_3(-x, y, z, t) = \lambda x\, R_2, \text{ para } \lambda \in \mathbb{Q}\,.}$$

Podemos considerar las situacions con $a_1 = 0$ y $a_1 = 1$, para concluir

No existe matriz $\mathcal{A}$ haciendo R_2 par con respeto x.

$X_0^*(160)$ no es bielíptica sobre $\mathbb{Q}$.

$X_0^*(160)$ es bielíptica sobre $\overline{\mathbb{Q}}$

Un par $(160, E)$ puede ser bielíptica sobre $K' = \mathbb{Q}(i)$, con $E \overset{K'}{\sim} E20a$.

Esto sucede sil existe $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(K)$ s.t.

$$R_2 := Q_2(a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z, t)\,,$$

$$R_3 := Q_3(a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z, t)$$

R_2 es par en x y $R_2|(R_3(x, y, z, t) - R_3(-x, y, z, t))$.

Tomamos $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4\,i & 1 \end{pmatrix}$, y obtenemos

$$\begin{aligned} R_2 = {} & 6t^2 + (2-6i)x^2 - 4ty + 3y^2 - 4itz + 6iyz - (1-6i)z^2\,, \\ R_3 = {} & 4tx^2 + 10t^2y + (6-6i)x^2y - 6ty^2 + 3y^3 + 10it^2z + (6+6i)x^2z \\ & -12ityz + 9iy^2z + 10tz^2 - (3-6i)yz^2 - (6-3i)z^3\,, \end{aligned}$$

Ahora R_2 y R_3 son pares en x, por tanto $X_0^*(160)$ es bielíptica sobre $\mathbb{Q}(i)$.

Pares que se debe estudiar (N, E), con $g_N^* > 5$

g_N^*	(N, E)
6	$(244, 61a), (272, 34a), (332, 83a), (332, 166a), (336, 42a), (336, 112a), (564, 94a), (620, 62a), (780, 65a), (780, 130c)$
7	$(320, 32a), (324, 27a), (360, 20a), (360, 30a), (450, 15a), (450, 75b), (456, 57a), (456, 76a), (456, 152a), (492, 123b), (504, 21a), (504, 36a), (504, 42a), (550, 55a), (550, 275a), (550, 550a), (558, 558a), (636, 53a), (660, 110b), (924, 77a), (924, 462a)$
8	$(408, 102a), (468, 26b), (468, 234b), (468, 234c), (480, 20a), (480, 24a), (480, 80b), (480, 160a), (540, 45a), (540, 54b), (990, 66a), (990, 99a), (1020, 102a)$
9	$(560, 56a), (560, 70a), (560, 280a), (1140, 190b), (1140, 285b)$
10	$(840, 20a), (840, 140b), (840, 210d), (1050, 175b)$
11	$(672, 112c), (672, 224a)$
13	$(1260, 21a), (1260, 70a), (1260, 90b), (1260, 210d)$

Ejemplo $g_N^* > 5$: $X_0^*(558)$, $g_{558}^* = 7$

$X_0^*(558)$ no es hipereliptica, no trigonal y $\dim \mathcal{L}_2 = 10$. La descomposición $J_0^*(558)/\mathbb{Q}$:

$\prod_{i=1}^3 A_{f_i} \times A_{f_5}$, $A_{f_1} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} 186c$, $A_{f_2} \overset{\mathbb{Q}}{\sim} E558a$, $f_1 \in \mathrm{New}_{186}^{B(62)}$, $f_2 \in \mathrm{New}_{558}^*$,
$f_3 \in \mathrm{New}_{93}^*$, $\dim A_{f_3} = 2$, $f_5 \in \mathrm{New}_{93}^{B(31)}$, $\dim A_{f_5} = 3$,

$g_1 = f_1$, $g_2 = f_2$, $\{g_3, g_4\}$ y $\{g_5, g_6, g_7\}$ bases de $\langle f_3^\sigma : \sigma \in G_\mathbb{Q}\rangle \cap \mathbb{Z}[[q]]$ y $\langle f_5^\sigma : \sigma \in G_\mathbb{Q}\rangle \cap \mathbb{Z}[[q]]$ resp.

Tomemos $(1+2B_2)(1\pm 3B_3) = 1 + 2B_2 \pm B_3 \pm 6B_6$,

una base de $\Omega^1_{X_0^*(558)/\mathbb{Q}}$: $\omega_i = h_i(q)\, dq/q$, $1 \le i \le 7$ con

$$
\begin{aligned}
h_1(q) &= & f_1(q) - 3f_1(q^3)\,,\\
h_2(q) &= & f_2(q)\,,\\
h_3(q) &= & g_3(q) + 2g_3(q^2) + 3g_3(q^3) + 6g_3(q^6)\,,\\
h_4(q) &= & g_4(q) + 2g_4(q^2) + 3g_4(q^3) + 6g_4(q^6)\,,\\
h_5(q) &= & g_5(q) + 2g_5(q^2) - 3g_5(q^3) - 6g_5(q^6)\,,\\
h_6(q) &= & g_6(q) + 2g_6(q^2) - 3g_6(q^3) - 6g_6(q^6)\,,\\
h_7(q) &= & g_7(q) + 2g_7(q^2) - 3g_7(q^3) - 6g_7(q^6)\,..
\end{aligned}
$$

Ejemplo $g_N^* > 5$: $X_0^*(558)$, $g_{558}^* = 7$

Sea $Q \in \mathbb{Q}_h[x_1, \cdots, x_7]$ de grado 2 (28 coeficientes):

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2 + a_6x_6^2 + a_7x_7^2 + a_8x_1x_2 + a_9x_1x_3 +$$
$$a_{10}x_1x_4 + a_{11}x_1x_5 + a_{12}x_1x_6 + a_{13}x_1x_7 + a_{14}x_2x_3 + a_{15}x_2x_4 +$$
$$a_{16}x_2x_5 + a_{17}x_2x_6 + a_{18}x_2x_7 + a_{19}x_3x_4 + a_{20}x_3x_5 + a_{21}x_3x_6 +$$
$$a_{22}x_3x_7 + a_{23}x_4x_5 + a_{24}x_4x_6 + a_{25}x_4x_7 + a_{26}x_5x_6 + a_{27}x_5x_7 + a_{28}x_6x_7$$

$Q(h_1, \cdots, h_7) = 0$, obtenemos $a_1, \cdots, a_{28}$ como combinación lineal de (recordad $\mathcal{L}_2 = 10$) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_9, a_{10}, a_{11}$.

Mas concretamente uno obtiene, $a_8 = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = a_{18} = 0$.

Por tanto, $Q(x_1, \cdots, x_7)$ es par en la variable x_2 $\forall Q \in \mathcal{L}_2$.

$X_0^*(558)$ es bielíptica sobre $\mathbb{Q}$ y la clase de $\mathbb{Q}$-isogenia de cociente bielíptico es $E558a$.

Resultados, N no libre de cuadrados

Teorema[B-González]

Sea $N > 1$ entero no libre de cuadrados con $g_N^* \geq 2$. Entonces,

- La curva $X_0^*(N)$ es bielíptica sobre $\mathbb{Q} \Leftrightarrow N$ aparece en la tabla siguiente

g_N^*	N
2	$88, 112, 116, 121, 153, 180, 184, 198, 204, 276, 284, 380$
3	$128, 144, 152, 164, 189, 196, 207, 234, 236, 240, 245, 248, 252,$ $294, 312, 315, 348, 420, 476$
4	$148, 172, 200, 224, 225, 228, 242, 260, 264, 275, 280, 300, 306, 342$
5	$364, 444, 495$
7	558

La curva $X_0^*(N)$ es bielíptica sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, pero no sobre $\mathbb{Q} \Leftrightarrow N = 160$.

- $\Gamma_2(X_0^*(N), \mathbb{Q}) = \infty \Leftrightarrow N$ aparece en la lista siguiente

$$88, 104, 112, 116, 117, 121, 125, 128, 135, 136, 147, 148, 152, 153, 164$$
$$168, 171, 172, 176, 180, 184, 198, 204, 207, 224, 225, 228, 234, 236, 240$$
$$248, 252, 260, 264, 276, 279, 280, 284, 312, 315, 342, 348, 364, 380, 420$$
$$444, 476, 495, 558.$$

Resultados, $X_0^{W_N}(N)$, N libre de cuadrados

Teorema [B.-González-Kamel]

Sea $N>1$ entero libre de cuadrados. Supongamos que el género de $X_0(N)/W_N$ es ≥ 2 para un subgrupo no trivial W_N de $B(N)$ diferente de $\langle w_N\rangle$. La curva $X_0(N)/W_N$ es bielíptica sii, existe $v\in B(N)\setminus W_N$ cumpliendo que el género de $X_0(N)/\langle W_N, v\rangle$ es uno, excepto por las siguientes curvas bielípticas modulares cocientes de género 4: $X_0(154)/\langle w_2, w_{77}\rangle$, $X_0(285)/\langle w_3, w_{95}\rangle$ y $X_0(286)/\langle w_2, w_{143}\rangle$.

$$End_{\overline{\mathbb{Q}}}(J_0^{W_N}(N)) = End_{\mathbb{Q}}(J_0^{W_N}(N)).$$

$J_0(N)^{W_N} \sim A_i^{n_i} \times \ldots$ con $n_i \geq 2$.

Resultados, $X_0^{W_N}(N)$, N no libre de cuadrados

Teorema[B-Kamel-Schweizer]

Sea $N > 1$ entero no libre de cuadrados. Donde el género de $X_0(N)/W_N$ es ≥ 2 para un subgrupo no trivial W_N de $B(N)$ diferente de $\langle w_N \rangle$. La curva $X_0(N)/W_N$, denotada por el pareo (N, W_N) es bielíptica sil aparece a continuación:

1. Es un par (N, W_N) con $|W_N| = 2$ y N es el conjunto
$$\{40, 48, 52, 63, 68, 72, 75, 76, 80, 96, 98, 99, 100, 108, 124, 188\},$$
o es un par (N, W_N) con $|W_N| = 4$ y N en el conjunto
$$\{84, 90, 120, 126, 132, 140, 150, 156, 220.\},$$
Todo estas curvas cocientes modulares son bielípticas sobre $\mathbb{Q}$ con un cociente elíptica dado por $X_0^*(N)$ de género 1,
2. o es uno de los siguientes 29 pares, ordenados por género

$Genero$	(N, W_N)
2	$(44, \langle w_4 \rangle), (60, \langle w_{20} \rangle), (60, \langle w_4, w_3 \rangle)$
3	$(56, \langle w_8 \rangle), (60, \langle w_4 \rangle)$
4	$(60, \langle w_3 \rangle), (60, \langle w_5 \rangle), (112, \langle w_7 \rangle), (168, \langle w_3, w_{56} \rangle)$
5	$(84, \langle w_4 \rangle), (88, \langle w_{11} \rangle), (90, \langle w_9 \rangle)$ $(117, \langle w_9 \rangle), (120, \langle w_{15} \rangle), (126, \langle w_{63} \rangle), (168, \langle w_8, w_7 \rangle),$ $(168, \langle w_7, w_{24} \rangle), (180, \langle w_4, w_9 \rangle), (184, \langle w_{23} \rangle), (252, \langle w_4, w_{63} \rangle)$
6	$(104, \langle w_8 \rangle), (168, \langle w_8, w_3 \rangle)$
7	$(120, \langle w_{24} \rangle), (136, \langle w_8 \rangle), (252, \langle w_9, w_7 \rangle)$
9	$(126, \langle w_9 \rangle), (171, \langle w_9 \rangle), (252, \langle w_4, w_9 \rangle)$
10	$(176, \langle w_{16} \rangle)$

Sobre la demostración caso $X_0^{W_N}(N)$ bielíptico

Algunos "steps" para la demostración

- Consideramos morfismo $X_0^{W_N} \to X_0^*(N)$, reduce lista N donde bielíptica, hiperelíptica o de género ≤ 1 de $X_0^*(N)$.
- Calculo de género de $X_0^{W_N}(N)$ para su estudio.
- Estudio diferenciado para N producto de 2,3 o 4 primos.
- Modificación del caso $X_0^*(N)$ para descomposición de la Jacobiana en $X_0^{W_N}(N)$.
- Cribas via estudio de puntos fijos de involuciones no Atkin-Lehner para N no libre de cuadrados.

Cribas adicionales

Castellnuovo, Criterio no-ramificado

Sea $\phi : X \to Y$ un mapeo de curvas de grado d. Si X posee una involución bielíptica v, entonces

$$g(X) \leq dg(Y) + d + 1$$

o el morfismo ϕ factoriza a traves de X/v.

En particular: Una curva hiperelíptica de género $g \geq 4$ no és bielíptica. Una curva trigonal de con género > 4 no es bielíptica. Una curva de género $g \geq 6$ tiene como mucho un involución bielíptica.

Sea w una involución de X com más de 8 puntos fijos. Entonces, o bién w es una involución bielíptica o bién X no es bielíptica

Sea X una curva de género g con una involución bielíptica v y sea G un subgrupo de $Aut(X)$ tal que la curva $Y = X/G$ tenga género $h \geq 2$.

(a) Si el mapeo $\phi : X \to Y$ es ramificado, i.e. si $g - 1 > |G|(h-1)$, y $g \geq 6$, entonces Y ha de ser hiperelíptica y v induce la involución hiperelíptica en Y.

(b) (criterio de recubrimiento no-ramificado) Si Y no es hiperelíptica, entondes debe ser bielíptica y el mapeo $\phi : X \to Y$ debe ser no-ramificado, i.e. $g - 1 = |G|(h-1)$.

Computo de puntos fijos de involuciones

Buscando involuciones bielípticas

Sea G un subgrupo de $Aut(X_0(N))$ donde todo elemento no-trivial es una involución. Entonces los puntos fijos de estas involucions són disjuntas y el género de $X_0(N)/G$ se obtiene por

$$|G|(2g(X_0(N)/G)-2)+\sum_{w\in G}\#(w,X_0(N))=2g(X_0(N))-2.$$

Sea $N=2^\alpha M$ con $\alpha\geq 2$ y M impar.

(a) Entonces S_2 es una involución de $X_0(N)$, definida sobre $\mathbb{Q}$, y conmuta con todas las involuciones AL w_r con r impar. También, $V_2=S_2w_{2^\alpha}S_2$ es una involución de $X_0(N)$, definida sobre $\mathbb{Q}$, y conmuta con toda w_r con $r||M$.

(b) Si $\alpha\geq 3$, entonces V_2 también conmuta con w_{2^α}. Por tanto, $V_2w_{2^\alpha}$ es una involución, y $S_2w_{2^\alpha}$ tiene orden 4. Realmente, $\langle S_2,w_{2^\alpha}\rangle\cong D_4$.

(c) Si $\alpha=2$, entonces $\langle S_2,w_4\rangle$ es no-abeliano de orden 6 con $V_2=S_2w_4S_2=w_4S_2w_4$ siendo la tercera involución y S_2w_4 y w_4S_2 con orden 3.

Involuciones

Si $N=2^\alpha M$ con $\alpha\geq 2$ y M impar, entonces

$$X_0(N)/w_{2^\alpha}S_2w_{2^\alpha}=X_0(N/2).$$

Sean u y v dos involuciones que conmutan en una curva X. Entonces uv es una involución y

$$\#(uv,X)=2\#(u,X/v)-\#(u,X).$$

Sea $N=2^\alpha M$ con $\alpha\geq 2$ y M impar. Y sea $r||M$.

(a) $\#(V_2,X_0(N))=\#(w_{2^\alpha},X_0(N))$ y
$\#(V_2w_r,X_0(N))=\#(w_{2^\alpha}w_r,X_0(N))$.

(b) $\#(S_2,X_0(N))=\#(w_{2^\alpha}S_2w_{2^\alpha},X_0(N))=(2g(X_0(N))-2)-2(2g(X_0(N/2))-2)$.

(c) $\#(S_2w_r,X_0(N))=\#(w_{2^\alpha}S_2w_{2^\alpha}w_r,X_0(N))=$
$2\#(w_r,X_0(N/2))-\#(w_r,X_0(N))$.

(d) Si $\alpha\geq 3$, entonces

$$\#(V_2w_{2^\alpha},X_0(N))=2\#(S_2,X_0(N/2))-\#(S_2,X_0(N))\ y$$

$$\#(V_2w_{2^\alpha}w_r,X_0(N))=2\#(S_2w_r,X_0(N/2))-\#(S_2w_r,X_0(N)).$$

Involuciones

Sea $9||N$ y $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) S_3 normaliza $\Gamma_0(N)$ e induce un automorphism en $X_0(N)$ de orden 3 definido sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Su conjugado Galois es S_3^2. A más, S_3 commuta con las involuciones de Atkin-Lehner w_r con $r \equiv 1 \mod 3$, mientras para $r \equiv 2 \mod 3$ tenemos que $w_r S_3 = S_3^2 w_r$ and $w_9 S_3$ has order 3.

(b) $V_3 = S_3 w_9 S_3^2$ es una involucioń en $X_0(N)$. Con respeto las involuciones de Atkin-Lehner tenemos $w_r V_3 = \begin{cases} V_3 w_r & if\ r \equiv 1 \mod 3\ or\ r = 9\ and \\ V_3 w_9 w_r & if\ r \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$
A más, si $r \equiv 2 \mod 3$ entonces $\langle V_3, w_r \rangle \cong D_4$ y $V_3 w_r$ tiene orden 4 con $(V_3 w_r)^2 = w_9$.

(c) V_3 como involución en $X_0(N)$ está definida sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Su conjugado $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{-3})/\mathbb{Q})$ es $V_3 w_9$. En particular, V_3 y $V_3 w_9$ tienen el mismo número de puntos fijos en $X_0(N)$.

(d) Mas generalmente, tenemos
$$\#(V_3 w_9, X_0(N)) = \#(V_3, X_0(N)) = \#(w_9, X_0(N))$$
y para $r \equiv 1 \mod 3$ también
$$\#(V_3 w_9 w_r, X_0(N)) = \#(V_3 w_r, X_0(N)) = \#(w_9 w_r, X_0(N)).$$

(e) V_3 como involución en $X_0(N)/W$ es definida sobre $\mathbb{Q}$ sil $w_9 \in W$.

Involuciones

Supon $4||N$ y $N = 4M$. Sea W' un subgrupo de $B(N)$ generado por w_4, $w_{m_1}, \ldots, w_{m_s}$ con $m_i||M$. Entonces

$$X_0(N)/W' \cong X_0(N)/\langle S_2 w_4 S_2, w_{m_1}, \ldots, w_{m_s}\rangle = X_0(N)/\langle w_4 S_2 w_4, w_{m_1}, \ldots, w_{m_s}\rangle$$

$$X_0(2M)/\langle w_{m_1}, \ldots, w_{m_s}\rangle.$$

Por tanto, si $A \in GL_2(\mathbb{R})$ es una involución bielíptica de $X_0(2M)/\langle w_{m_1}, \ldots, w_{m_s}\rangle$, entonces $S_2 A S_2$ normaliza en $\langle \Gamma_0(N), W'\rangle$ e induce una involución bielípica en $X_0(N)/W'$.
Sea $9||N$. Y W' un subgrupo de $B(N)$ generado por $w_{n_1}, \ldots, w_{n_t}$ $(n_i||N)$ y sea $W" = \langle \{w_{n_i} w_9^{e(n_i)}\}_{i\in\{1,\ldots,t\}}\rangle$ donde $e(m) = 0$ si $m \equiv 1 \mod 3$ o si $9||m$ y $m/9 \equiv 1 \mod 3$, y $e(m) = 1$ en caso opuesto. Entonces V_3 induce un isomorfismo

$$X_0(N)/W' \cong X_0(N)/W".$$

g_{W_N}	(N, W_N)	(w, E)	$\mathbb{Q} - Jacobiandecomp.$
6	$(104, \langle w_8 \rangle)$	$(V_2 w_{104}, E26a)$	$(E26a)^2 \times E26b \times E52a \times A_{f,104}$
	$(156, \langle w_4, w_{13} \rangle)$	$(w_3, E26b = X_0^*(156))$	$(E26b)^2 \times A_{f,39}^2$
	$(168, \langle w_8, w_3 \rangle)$	$(V_2 w_{168}, E14a)$	$(E14a)^2 \times E42a \times E56b \times E84b \times E168b$
	$(220, \langle w_5, w_{44} \rangle)$	$(w_4, E110b = X_0^*(220))$	$E11a \times E20a \times A_f \times 110b \times 110c$
	$(220, \langle w_{11}, w_{20} \rangle)$	$(w_4, E110b)$	$E44a \times E55a \times E110b \times A_f \times E220a$
7	$(120, \langle w_{24} \rangle)$	$(V_2 w_{40}, E15a)$	$(E15a)^2 \times (E20a)^2 \times E30a \times E40a \times E120a$
	$(124, \langle w_4 \rangle)$	$(w_{31}, E62a = X_0^*(124)$	$(A_{f_1,31})^2 \times E62a \times A_{f_3,62}$
	$(136, \langle w_8 \rangle)$	$(V_2 w_{136}, E17a)$	$(E17a)^2 \times E34a \times A_{f_3,64} \times A_{f_4,136}$
	$(252, \langle w_9, w_7 \rangle)$	$(V_3 w_7, E36a)$	$(E21a)^3 \times E36a \times (E42a)^2 \times E84b$
8	$(220, \langle w_4, w_5 \rangle)$	$(w_{11}, E110b = X_0^*(220))$	$(E11a)^2 \times A_f^2 \times E110b \times E110c$
9	$(126, \langle w_9 \rangle)$	$(V_3 w_7, E14a)$	$(E14a)^2 \times (E21a)^2 \times E42a \times (A_{f,63})^2$
	$(171, \langle w_9 \rangle)$	$(V_3 w_{171}, E19a)$	$(E19a)^2 \times E57a \times E57b \times E57c \times A_{f,171}, dim(A_f) = 4$
	$(252, \langle w_9, w_4 \rangle)$	$(V_3 w_7, E14a)$	$(E14a)^2 \times (E21a)^2 \times E42a \times (A_{f,63})^2$
10	$(176, \langle w_{16} \rangle)$	$(V_3 w_{176}, E11a)$	$(E11a)^3 \times E44a \times E88a \times A_{f_1,88} \times E176a \times A_{f_2,176}$
11	$(188, \langle w_4 \rangle)$	$(w_{47}, X_0^*(188) = E94a)$	$A_{f_1}^2 \times E94a \times A_{f_3}, dim(A_{f_1}) = 4$

Tabla, $g_{W_N} \geq 6$ Bielíptico

Curvas bielipticas cocientes no definidas sobre $\mathbb{Q}$

Ningún morfismo de grado 2 a la c.e. definido sobre $\mathbb{Q}$

$(252, \langle w_4, w_{63} \rangle)$	$(V_3, E14a)$ $(V_3 w_7, E14a)$
$(126, \langle w_{65} \rangle)$	$(V_3, E14a)$ $(V_3 w_9, E14a)$

Curvas bielipticas cocientes, con cociente bielíptico no sobre $\mathbb{Q}$

$(63\langle w_9 \rangle)$, género 3. $J_0^{W_N} \sim_{\mathbb{Q}} X_0^*(63) \times A_{f,63}$, con $\dim(A_{f,63}) = 2$ y

$$A_{f,63} \sim_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})} E^2$$

con

$$E : Y^2 = -(26 + 6\sqrt{-3})X^3 - 27X^2 + 6\sqrt{-3}X + 1$$

Donde $(w_7, X_0^*(63) = E21a)$ es un par bielíptico sobre $\mathbb{Q}$
pero tenemos dos involuciones bielípticas más no definidas sobre $\mathbb{Q}$ con cociente elíptico E (una conjugación de la otra).

Referencias

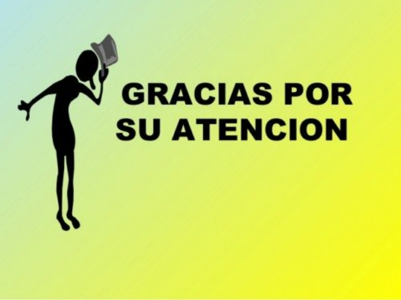
1 Bars, F.; González Rovira, J.: Bielliptic modular curves $X_0^*(N)$ with square-free levels. Math. Comp. 88 (2019), no. 320, 29392957.

2 Bars, F.; González Rovira, J.: Bielliptic modular curves $X_0^*(N)$,Journal of Algebra 559, 726-759, (2020).

3 Badr,E.;Bars,F.: Bielliptic smooth plane curves and quadratic points. International Journal of Number Theory 17 (04), 1047-1066 (2021).

4 F Bars, J González, M Kamel : Bielliptic quotient modular curves with N square-free. Journal of Number Theory 216, 380-402, (2020).

5 F.Bars, M.Kamel, A. Schweizer: Bielliptic quotient modular curves. Preprint September 2021.


GRACIAS POR
SU ATENCION