Variedades hiperbólicas con un número grande de geodésicas cerradas más cortas.

Plinio G. P. Murillo

Seminario Latinoamericano de Teoría de Números
LaTeN

Abril 6, 2022

Universidade Federal Fluminense

Plan de la charla

1. Dos problemas clásicos en Teoría de Números.
2. ¿Existen variedades hiperbólicas con un número grande de geodésicas cerradas más cortas?

Dos problemas clásicos en Teoría de Números

Dos problemas clásicos en Teoría de Números

1. Distribución de los números primos.
2. Formas cuadráticas binarias con coeficientes enteros $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

Una idea de Riemann

Bernhard Riemann (1826-1866)

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$
$$= \prod_{p,primo} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

El teorema de los números primos.

J. S. Hadamard (1865-1963)

C. J. de la Vallée Poussin(1866-1962)

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N}; \text{p primo} \leq x\}$$

El teorema de los números primos.

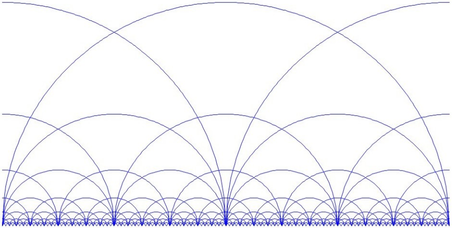
J. S. Hadamard (1865-1963)

C. J. de la Vallée Poussin(1866-1962)

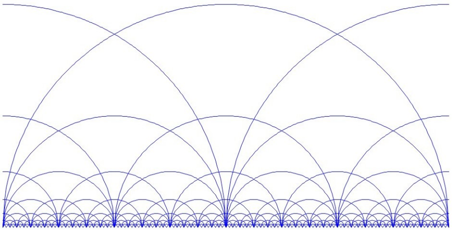
$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N}; \text{p primo} \leq x\}$$

$$(1896) : \pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \quad x \to \infty$$

Geometría hiperbólica

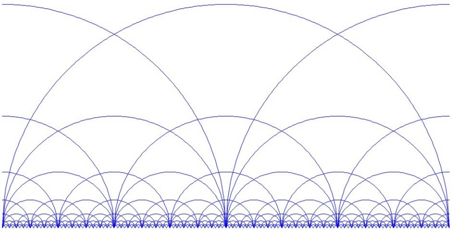


Geometría hiperbólica



$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$$

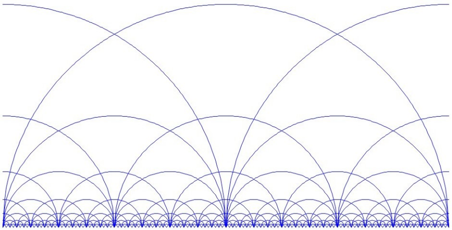
Geometría hiperbólica



$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$$

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Geometría hiperbólica

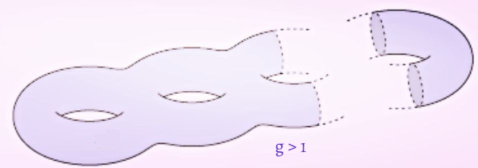


$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$$

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

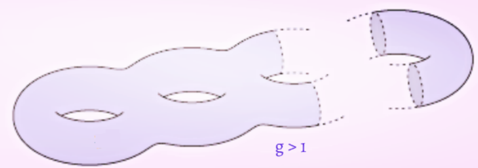
Las curvas azules son las geodésicas de $\mathbb{H}^2$ i.e *minimizan localmente la distancia*.

Variedad hiperbólica



Una superficie compacta y orientable S_g con $g > 1$ admite uma métrica localmente isométrica a $\mathbb{H}^2$.

Variedad hiperbólica

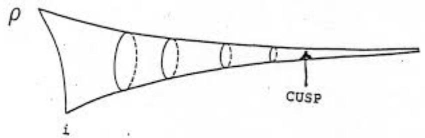


Una superficie compacta y orientable S_g con $g > 1$ admite uma métrica localmente isométrica a $\mathbb{H}^2$.

Variedad hiperbólica: Variedad diferenciable con una métrica localmente isométrica al espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$.

Una superficie muy importante!

Superficie Modular



$$S = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$$

"*Teorema de los números primos*" para superficies hiperbólicas.

"*Teorema de los números primos*" para superficies hiperbólicas.

Seja S una superficie hiperbólica (de área finita).

$$\pi(x) = \#\{\gamma; \gamma \text{ geodésica cerrada primitiva de S, y } e^{\ell(\gamma)} \leq x\}$$

"*Teorema de los números primos*" para superficies hiperbólicas.

Seja S una superficie hiperbólica (de área finita).

$$\pi(x) = \#\{\gamma; \gamma \quad \text{geodésica cerrada primitiva de S, y} \quad e^{\ell(\gamma)} \leq x\}$$

- γ es *primitiva* si $\gamma \neq \beta^k$.

"*Teorema de los números primos*" para superficies hiperbólicas.

Seja S una superficie hiperbólica (de área finita).

$$\pi(x) = \#\{\gamma; \gamma \ \text{ geodésica cerrada primitiva de S, y } \ e^{\ell(\gamma)} \leq x\}$$

- γ es *primitiva* si $\gamma \neq \beta^k$.
- $\ell(\gamma)$:= Longitud de γ.

“*Teorema de los números primos*” para superficies hiperbólicas.

Seja S una superficie hiperbólica (de área finita).

$$\pi(x) = \#\{\gamma; \gamma \quad \text{geodésica cerrada primitiva de S, y} \;\; e^{\ell(\gamma)} \leq x\}$$

- γ es *primitiva* si $\gamma \neq \beta^k$.
- $\ell(\gamma)$:= Longitud de γ.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \quad x \to \infty$$

Huber-Selberg $\sim 50's$

"*Teorema de los números primos*" para superficies hiperbólicas.

Seja S una superficie hiperbólica (de área finita).

$$\pi(x) = \#\{\gamma; \gamma \ \text{ geodésica cerrada primitiva de S, y } \ e^{\ell(\gamma)} \leq x\}$$

- γ es *primitiva* si $\gamma \neq \beta^k$.
- $\ell(\gamma)$:= Longitud de γ.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \quad x \to \infty$$

Huber-Selberg $\sim 50's$

- Fórmulas asintóticas para la distribución de longitudes de geodésicas cerradas de variedades Riemanianas.

"Teorema de los números primos" para superficies hiperbólicas.

Seja S una superficie hiperbólica (de área finita).

$$\pi(x) = \#\{\gamma; \gamma \ \text{ geodésica cerrada primitiva de S, y } \ e^{\ell(\gamma)} \leq x\}$$

- γ es *primitiva* si $\gamma \neq \beta^k$.
- $\ell(\gamma)$:= Longitud de γ.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \quad x \to \infty$$

Huber-Selberg $\sim 50's$

- Fórmulas asintóticas para la distribución de longitudes de geodésicas cerradas de variedades Riemanianas.
- Mejora del término de error.

Formas cuadráticas binarias

Ecuación de Pell: Seja $d > 0$. ¿Cuáles son las soluciones enteras de

$$x^2 - dy^2 = 4? \tag{1}$$

Ecuación de Pell: Seja $d > 0$. ¿Cuáles son las soluciones enteras de

$$x^2 - dy^2 = 4? \tag{1}$$

Proposición

Sea (x_d, y_d) una solución positiva de (1) con x_d minimal. Entonces, toda solución entera (x, y) de (1) satisface

$$\frac{x + y\sqrt{d}}{2} = \left(\frac{x_d + y_d\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Ecuación de Pell: Seja $d > 0$. ¿Cuáles son las soluciones enteras de

$$x^2 - dy^2 = 4? \tag{1}$$

Proposición

Sea (x_d, y_d) una solución positiva de (1) con x_d minimal. Entonces, toda solución entera (x, y) de (1) satisface

$$\frac{x + y\sqrt{d}}{2} = \left(\frac{x_d + y_d\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

para algún $n \in \mathbb{Z}$.

$\varepsilon_d = \frac{x_d + y_d\sqrt{d}}{2}$: **Solución Fundamental** de (1).

En general...

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

En general...

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En general...

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definición

- *Q es **primitiva** si $mcd(a,b,c) = 1$.*

En general...

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definición

- *Q es* ***primitiva*** *si $mcd(a,b,c) = 1$.*
- ***Equivalencia****: $Q \sim Q'$ si existe $P \in SL(2,\mathbb{Z})$ tal que $Q' = PQP^t$*

En general...

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definición

- *Q es **primitiva** si $mcd(a,b,c) = 1$.*
- ***Equivalencia**: $Q \sim Q'$ si existe $P \in SL(2,\mathbb{Z})$ tal que $Q' = PQP^t$*
- ***Discriminante**: $d(Q) = b^2 - 4ac$*

En general...

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2. \quad a,b,c \in \mathbb{Z}$$

$$Q(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definición

- *Q es **primitiva** si $mcd(a,b,c) = 1$.*
- ***Equivalencia**: $Q \sim Q'$ si existe $P \in SL(2,\mathbb{Z})$ tal que $Q' = PQP^t$*
- ***Discriminante**: $d(Q) = b^2 - 4ac$*

Número de clase:

$$h(d) = \#\{\text{Formas cuadráticas } \; Q \; \text{ con } \; d(Q) = d\}/\sim$$

C. F. Gauss (1777-1855)

J. L. Lagrange (1736-1813)

Teorema (Lagrange, Gauss)

$$h(d) < \infty.$$

C. F. Gauss (1777-1855)

J. L. Lagrange (1736-1813)

Teorema (Lagrange, Gauss)

$$h(d) < \infty.$$

- Problema abierto (aún hoy): $h(d) = ?$

C. F. Gauss (1777-1855)

J. L. Lagrange (1736-1813)

Teorema (Lagrange, Gauss)

$$h(d) < \infty.$$

- Problema abierto (aún hoy): $h(d) = ?$
- Conjectura (Gauss): $h(d) = 1$ para infinitos $d > 0$.

Sea Q una form cuadrática binaria entera, con $d = d(Q) > 0$ no cuadrado.

Sea Q una form cuadrática binaria entera, con $d = d(Q) > 0$ no cuadrado.

- Sea (x_d, y_d) la solución de

$$x^2 - dy^2 = 4$$

con $x > 0$ mínimo.

Sea Q una form cuadrática binaria entera, con $d = d(Q) > 0$ no cuadrado.

- Sea (x_d, y_d) la solución de
$$x^2 - dy^2 = 4$$
con $x > 0$ mínimo.
- $\varepsilon_d = \frac{x_d + \sqrt{d} y_d}{2}$

Sea Q una form cuadrática binaria entera, con $d = d(Q) > 0$ no cuadrado.

- Sea (x_d, y_d) la solución de
$$x^2 - dy^2 = 4$$
con $x > 0$ mínimo.
- $\varepsilon_d = \frac{x_d + \sqrt{d}y_d}{2}$
- $D_x = \{d; \varepsilon_d \leq x\}$

Sea Q una form cuadrática binaria entera, con $d = d(Q) > 0$ no cuadrado.

- Sea (x_d, y_d) la solución de

$$x^2 - dy^2 = 4$$

  con $x > 0$ mínimo.
- $\varepsilon_d = \frac{x_d + \sqrt{d} y_d}{2}$
- $D_x = \{d; \varepsilon_d \leq x\}$

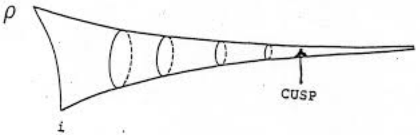
P. Sarnak (1953-)

Teorema (Sarnak, 1980)

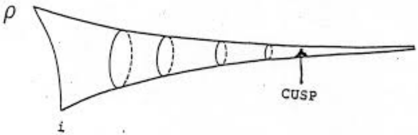
$$\frac{1}{|D_x|} \sum_{d \in D_x} h(d) = \frac{16}{35} \frac{x}{\log(x^2)} + O(x^{\frac{2}{3}+\epsilon}), x \to \infty$$

para todo $\epsilon > 0$.

Sarnak deduce el resultado a partir de un teorema de los "números primos" para la superficie modular $S = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$.

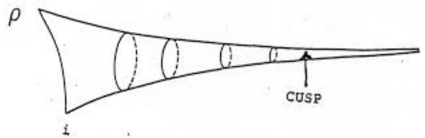


Sarnak deduce el resultado a partir de un teorema de los “números primos” para la superficie modular $S = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$.



$$\{\ell(\gamma);\gamma \text{ geodésica cerrada primitiva en } S\} = \{2\log(\varepsilon_d);\, d = d(Q) > 0\}$$

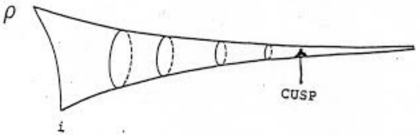
Sarnak deduce el resultado a partir de un teorema de los "números primos" para la superficie modular $S = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$.



$$\{\ell(\gamma); \gamma \text{ geodésica cerrada primitiva en } S\} = \{2\log(\varepsilon_d); d = d(Q) > 0\}$$

$$\text{Multiplicidad de } \ell(\gamma) = h(d)$$

Sarnak deduce el resultado a partir de un teorema de los "números primos" para la superficie modular $S = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$.

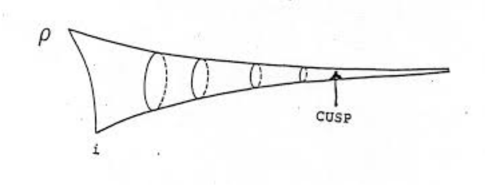


$$\{\ell(\gamma); \gamma \text{ geodésica cerrada primitiva en } S\} = \{2\log(\varepsilon_d); d = d(Q) > 0\}$$

$$\text{Multiplicidad de } \ell(\gamma) = h(d)$$

Multiplicidad de $\ell(\gamma)$: $\#\{$geodésicas cerradas no-conjugadas/homotópicas de longitud $\ell(\gamma)\}$

Sarnak deduce el resultado a partir de un teorema de los "números primos" para la superficie modular $S = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$.



$$\{\ell(\gamma); \gamma \ \text{ geodésica cerrada primitiva en } \ S\} = \{2\log(\varepsilon_d); d = d(Q) > 0\}$$

$$\text{Multiplicidad de } \ell(\gamma) = h(d)$$

Multiplicidad de $\ell(\gamma)$: #{geodésicas cerradas no-conjugadas/homotópicas de longitud $\ell(\gamma)$}

Corolario

Existe una secuencia $\ell_i \to \infty$ de longitudes de geodésicas cerradas en $S = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ con multiplicidad

$$m_i \gtrsim c_D \frac{e^{\ell_i/2}}{\ell_i}.$$

Un resultado similar para formas cuadráticas

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathcal{O}_D.$$

$\mathcal{O}_D$: *Anillo de enteros del cuerpo de números* $k_D = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ *y libre de cuadrados.*

Un resultado similar para formas cuadráticas

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathcal{O}_D.$$

$\mathcal{O}_D$: *Anillo de enteros del cuerpo de números* $k_D = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ *y libre de cuadrados.*

Suponga $d = d(Q)$ no es un cuadrado.

Un resultado similar para formas cuadráticas

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathcal{O}_D.$$

$\mathcal{O}_D$: *Anillo de enteros del cuerpo de números* $k_D = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ *y libre de cuadrados.*

Suponga $d = d(Q)$ no es un cuadrado.

- La ecuación tipo Pell
$$x^2 - dy^2 = 4$$
tiene una *solución fundamental* $\varepsilon_d = \frac{x_d + \sqrt{d} y_d}{2}$.

Un resultado similar para formas cuadráticas

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathcal{O}_D.$$

$\mathcal{O}_D$: *Anillo de enteros del cuerpo de números* $k_D = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ *y libre de cuadrados.*

Suponga $d = d(Q)$ no es un cuadrado.

- La ecuación tipo Pell
$$x^2 - dy^2 = 4$$
tiene una *solución fundamental* $\varepsilon_d = \frac{x_d + \sqrt{d}y_d}{2}$.
- $D_x = \{d; |\varepsilon_d| \leq x\}$

Un resultado similar para formas cuadráticas

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, a, b, c \in \mathcal{O}_D.$$

$\mathcal{O}_D$: *Anillo de enteros del cuerpo de números* $k_D = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ *y libre de cuadrados.*

Suponga $d = d(Q)$ no es un cuadrado.

- La ecuación tipo Pell
$$x^2 - dy^2 = 4$$
tiene una *solución fundamental* $\varepsilon_d = \frac{x_d + \sqrt{d}y_d}{2}$.
- $D_x = \{d; |\varepsilon_d| \leq x\}$

Teorema (Sarnak, 1982)

$$\frac{1}{|D_x|} \sum_{d \in D_x} h(d) = c_D \frac{x^2}{\log(x^2)} + O(x^{\frac{4}{3}+\epsilon}), x \to \infty$$

para todo $\epsilon > 0$.

Sarnak deduce el resultado a partir de un Teorema de “números primos” para **orbifolds de Bianchi** $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$.

Sarnak deduce el resultado a partir de un Teorema de “números primos” para **orbifolds de Bianchi** $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$.

$$\{\ell(\gamma); \gamma \text{ geodésica cerrada primitiva en } M_D\} = \{2\log(|\varepsilon_d|); d = d(Q)\}$$

Sarnak deduce el resultado a partir de un Teorema de “números primos” para **orbifolds de Bianchi** $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$.

$$\{\ell(\gamma); \gamma \ \text{ geodésica cerrada primitiva en } \ M_D\} = \{2\log(|\varepsilon_d|); d = d(Q)\}$$
$$\text{Multiplicidad de } \ell(\gamma) = h(d)$$

Sarnak deduce el resultado a partir de un Teorema de "números primos" para **orbifolds de Bianchi** $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$.

$$\{\ell(\gamma); \gamma \text{ geodésica cerrada primitiva en } M_D\} = \{2\log(|\varepsilon_d|); d = d(Q)\}$$
$$\text{Multiplicidad de } \ell(\gamma) = h(d)$$

Corolario

Existe una sucesión $\ell_i \to \infty$ *de longitudes de geodésicas cerradas en* $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$ *con multiplicidad*

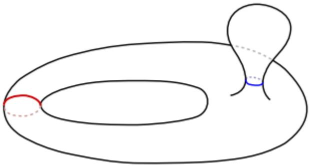
$$m_i \gtrsim c_D \frac{e^{\ell_i}}{\ell_i}.$$

¿Existen variedades hiperbólicas con un número grande de geodésicas cerradas más cortas?

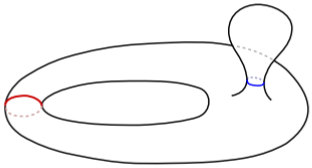
¿Existen variedades hiperbólicas con un número grande de geodésicas cerradas más cortas?

¿Porqué esa pregunta es interesante para mi/nosotros?

Sístole



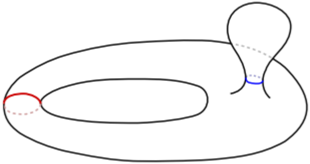
Sístole: Geodésica cerrada *no contráctil* cuya longitud es mínima.



Sístole: Geodésica cerrada *no contráctil* cuya longitud es mínima.

Podría existir más de una sístole!

Sístole



Sístole: Geodésica cerrada *no contráctil* cuya longitud es mínima.

Podría existir más de una sístole!

K(M) = Número de sístoles en la variedad hiperbólica M.

¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

dim $= 2$

¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

dim = 2

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\} \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$

¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

dim = 2

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\} \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$

Si $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ es un subgrupo discreto y libre de torsión (i.e $\gamma^n \neq \mathrm{Id}$ si $\gamma \neq \mathrm{Id}$), entonces $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ es una superficie hiperbólica.

¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

dim = 2

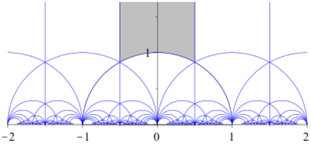
$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

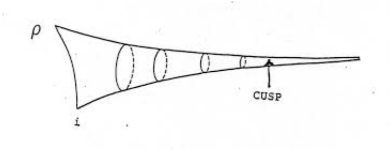
$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\} \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$$

Si $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ es un subgrupo discreto y libre de torsión (i.e $\gamma^n \neq \mathrm{Id}$ si $\gamma \neq \mathrm{Id}$), entonces $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ es una superficie hiperbólica.

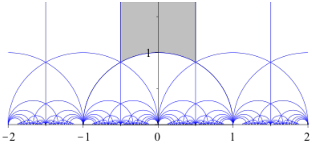
¿Cómo construir subgrupos discretos en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$?

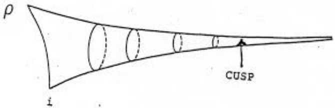
Superfície Modular: $S = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$



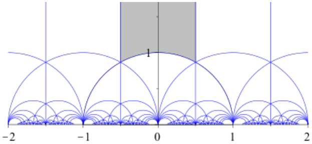


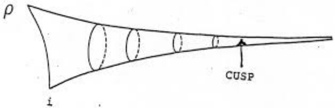
Superfície Modular: $S = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ $\quad$ $\mathrm{area}(S) = \frac{\pi}{3}$





Superfície Modular: $S = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ $\quad$ $\mathrm{area}(S) = \frac{\pi}{3}$

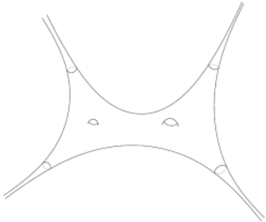




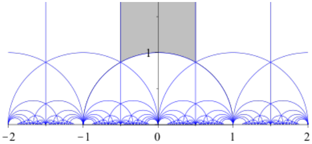
Superfícies de congruéncia: Dado $p \in \mathbb{Z}$ considere el subgrupo

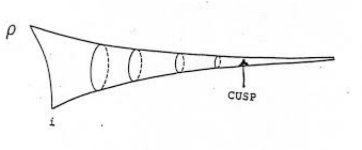
$$\Gamma(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \bmod p, b \equiv c \equiv 0 \bmod p \right\}.$$

$$S_p = \Gamma(p)\backslash\mathbb{H}^2$$



Superfície Modular: $S = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$ $\quad$ $\mathrm{area}(S) = \frac{\pi}{3}$

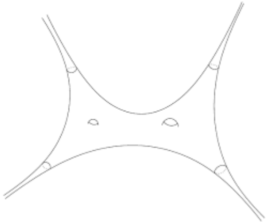




Superfícies de congruéncia: Dado $p \in \mathbb{Z}$ considere el subgrupo

$$\Gamma(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \bmod p, b \equiv c \equiv 0 \bmod p \right\}.$$

$$S_p = \Gamma(p)\backslash\mathbb{H}^2 \qquad \mathrm{area}(S_p) \approx p^3$$



¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

$\dim = 3$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\} \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$$

Si $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo discreto y libre de torsión (i.e $\gamma^n \neq \mathrm{Id}$ si $\gamma \neq \mathrm{Id}$), entonces $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es una 3-variedad hiperbólica.

¿Cómo construir variedades hiperbólicas?

dim = 3

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$$

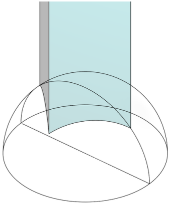
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\} \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$$

Si $\Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ es un subgrupo discreto y libre de torsión (i.e $\gamma^n \neq \mathrm{Id}$ si $\gamma \neq \mathrm{Id}$), entonces $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ es una 3-variedad hiperbólica.

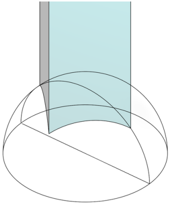
¿Cómo construir subgrupos discretos en $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$?

$M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[i])\backslash\mathbb{H}^3$



https://globberingmattress.wordpress.com/2018/02/24/some-pictures-in-the-hyperbolic-3-space/

$M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[i])\backslash\mathbb{H}^3$



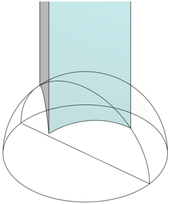
https://globberingmattress.wordpress.com/2018/02/24/some-pictures-in-the-hyperbolic-3-space/

Variedades de Bianchi:

$$M = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$$

$\mathcal{O}_D$: Anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ y no cuadrado.

$M = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}[i])\backslash\mathbb{H}^3$



https://globberingmattress.wordpress.com/2018/02/24/some-pictures-in-the-hyperbolic-3-space/

Variedades de Bianchi:

$$M = \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$$

$\mathcal{O}_D$: Anillo de enteros del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, $D > 0$ y no cuadrado.

Variedades de congruencia: Dado $\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_D$ un ideal primo, considere el subgrupo

$$\Gamma(\mathfrak{p}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_D) \mid a \equiv d \equiv 1 \bmod \mathfrak{p},\, b \equiv c \equiv 0 \bmod \mathfrak{p} \right\}.$$

$$M_{\mathfrak{p}} = \Gamma(\mathfrak{p})\backslash\mathbb{H}^3$$

Algunos comentarios

Algunos comentarios

- Las variedades anteriores son **no compactas**, pero tienen **área/volumen finito**.

Algunos comentarios

- Las variedades anteriores son **no compactas**, pero tienen **área/volumen finito**.
- Los grupos discretos anteriores, son ejemplos de **grupos aritméticos.**

Algunos comentarios

- Las variedades anteriores son **no compactas**, pero tienen **área/volumen finito**.
- Los grupos discretos anteriores, son ejemplos de **grupos aritméticos.**
- Se pueden contruir ejemplos cocompactos.

Algunos comentarios

- Las variedades anteriores son **no compactas**, pero tienen **área/volumen finito**.
- Los grupos discretos anteriores, son ejemplos de **grupos aritméticos.**
- Se pueden contruir ejemplos cocompactos.
- *Queremos entender propiedades geométricas de variedades Riemanianas contruidas a partir de dichos grupos (aritméticos).*

Una respuesta a la pregunta inicial se puede encontrar en la geometría de variedades hiperbólicas aritméticas

Contemporary Mathematics
Volume **201**, 1997

Extremal Riemann Surfaces with a Large Number of Systoles

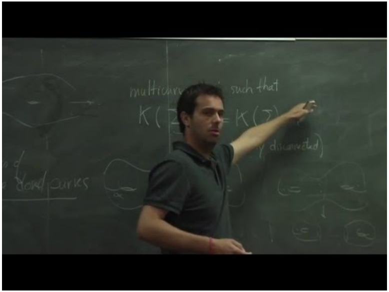
Paul Schmutz Schaller

ABSTRACT. The problem of finding the hyperbolic Riemann surface of a fixed genus g with the biggest number of systoles (the shortest closed geodesics) is a non-Euclidean analogue to the well-known kissing number problem for lattice sphere packings. In the hyperbolic case however, the results are more striking. Here, examples are constructed with at least $(6g-6)^{4/3-\epsilon}$ different systoles for every positive ϵ, and it is conjectured that $C(6g-6)^{4/3}$ is the sharp upper bound for the number of systoles for a universal constant C. It is also shown that the non-compact case and the compact case are analogous for this problem.

Teorema (Schmutz, 1997)

Para $p \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande

$$K(\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}^2) \geq \mathrm{area}(\Gamma(p)\backslash\mathbb{H}^2)^{\frac{4}{3}-\epsilon}$$



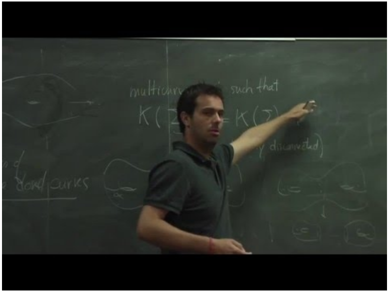
Hugo Parlier

Teorema (Parlier, 2013)

*Toda superficie hiperbólica S de **área finita** satisface*

$$K(S) \leq U \frac{\mathrm{area}(S)^2}{\log(\mathrm{area}(S))}$$

para cierta constante $U > 0$.



Hugo Parlier

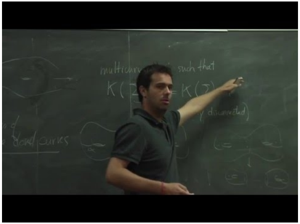
Teorema (Parlier, 2013)

Toda superficie hiperbólica S de ***área finita*** *satisface*

$$K(S) \leq U \frac{\mathrm{area}(S)^2}{\log(\mathrm{area}(S))} \approx \mathrm{area}(S)^{2-\epsilon}$$

para cierta constante $U > 0$.

Federica Fanoni



Hugo Parlier

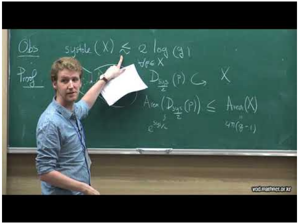
Teorema (Fanoni-Parlier, 2015)

Toda supérficie hiperbólica S con género $g \geq 1$, y n cúspides satisface

$$K(S) \leq C \cdot (g+n) \frac{g}{\log(g+1)}$$

donde $C > 0$ es una constante.

Maxime Fortier Bourque



Bram Petri

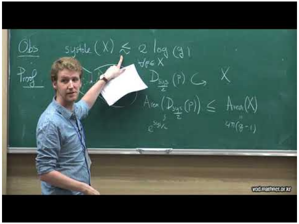
Teorema (Bourque-Petri, To appear in Amer. J. Math.)

*Toda n-variedad hiperbólica **compacta** M satisface*

$$K(M) \leq A_n \frac{\mathrm{vol}(M)^2}{\log(1 + \mathrm{vol}(M))}$$

para cierta constante $A_n > 0$.

Maxime Fortier Bourque



Bram Petri

Teorema (Bourque-Petri, To appear in Amer. J. Math.)

Toda n-variedad hiperbólica ***compacta*** *M satisface*

$$K(M) \leq A_n \frac{\mathrm{vol}(M)^2}{\log(1+\mathrm{vol}(M))} \approx \mathrm{vol}(M)^{2-\epsilon}$$

para cierta constante $A_n > 0$.

Dimensión 3

Teorema (Dória, M. Proc. Amer. Math. Soc. 2021)

Existen 3-variedades hiperbólicas M_i ***no compactas*** *de volumen finito arbitrariamente grande tal que*

$$K(M_i) \geq c_2 vol(M_i)^{\frac{31}{27}-\epsilon}$$

para todo $\epsilon > 0$, donde c_2 es una constante.

Ideas principales

1. (**Sarnak 1980**). Existe una sucesión $\ell_i \to \infty$ de longitudes de geodésicas cerradas en $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$ con multiplicidad

$$m_i \gtrsim c_D \frac{e^{\ell_i}}{\ell_i}.$$

Ideas principales

1. (**Sarnak 1980**). Existe una sucesión $\ell_i \to \infty$ de longitudes de geodésicas cerradas en $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$ con multiplicidad
$$m_i \gtrsim c_D \frac{e^{\ell_i}}{\ell_i}.$$
2. Contruir $M_i = \Gamma_i\backslash\mathbb{H}^3$, dónde $\Gamma_i <_{i.f} \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)$ con m_i sístoles de longitud ℓ_i.

Ideas principales

1. (**Sarnak 1980**). Existe una sucesión $\ell_i \to \infty$ de longitudes de geodésicas cerradas en $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$ con multiplicidad
$$m_i \gtrsim c_D \frac{e^{\ell_i}}{\ell_i}.$$
2. Contruir $M_i = \Gamma_i\backslash\mathbb{H}^3$, dónde $\Gamma_i <_{i.f} \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)$ con m_i sístoles de longitud ℓ_i.
3. $G_i = \mathrm{Isom}^+(M_i)$ actúa sobre M_i y produce $m_i \cdot |G_i|$ sístoles.

Ideas principales

1. (**Sarnak 1980**). Existe una sucesión $\ell_i \to \infty$ de longitudes de geodésicas cerradas en $M_D = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3$ con multiplicidad
$$m_i \gtrsim c_D \frac{e^{\ell_i}}{\ell_i}.$$
2. Contruir $M_i = \Gamma_i\backslash\mathbb{H}^3$, dónde $\Gamma_i <_{i.f} \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_D)$ con m_i sístoles de longitud ℓ_i.
3. $G_i = \mathrm{Isom}^+(M_i)$ actúa sobre M_i y produce $m_i \cdot |G_i|$ sístoles.
4. $|G_i| \sim \mathrm{vol}(M_i)$ y $m_i \gtrsim C \cdot \frac{\mathrm{vol}(M_i)^{4/27}}{\log(\mathrm{vol}(M_i))}$.

Dimensión $n \geq 2$

Teorema (Dória, Freire, M. En proceso)

*Para todo $n \geq 2$, existe una sucesión $\{M_i\}$ de n -variedades hiperbólicas aritméticas **compactas** con $\mathrm{vol}(M_i) \to \infty$ tal que*

$$K(M_i) \geq c_3 vol(M_i)^{1+\frac{2}{n(n+1)}-\epsilon}$$

para todo $\epsilon > 0$, dónde c_3 es una constante.

Muchas gracias!

Muchas gracias!

Muito obrigado!